

École doctorale n°432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

**Doctorat ParisTech**

**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École nationale supérieure des mines de Paris**

**Spécialité “ Sciences et génie des matériaux ”**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Sam CUVILLIEZ**

le 1<sup>er</sup> février 2012

**Passage d'un modèle d'endommagement  
continu régularisé à un modèle de fissuration  
cohésive dans le cadre de la rupture quasi-fragile**

Directeur de thèse : **Frédéric FEYEL**

Co-encadrement de la thèse : **Sylvie MICHEL-PONNELLE**

**Jury**

**M. Alain COMBESCURE,**  
**Mme. Claudia COMI,**  
**M. Yann MONERIE,**  
**M. Marc GEERS,**  
**M. Frédéric FEYEL,**  
**Mme. Sylvie MICHEL-PONNELLE,**

Professeur, INSA de Lyon  
Professeur, Politecnico di Milano  
HDR, Directeur du Laboratoire MIST, IRSN  
Professeur, TU Eindhoven  
Professeur associé à l'École Polytechnique  
Docteur, Ingénieur Chercheur, EDF R&D

Président du Jury  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur



# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu les membres du jury : Madame Claudia Comi et Monsieur Yann Monerie pour avoir accepté de rapporter sur ce mémoire, Messieurs Alain Combescure et Marc Geers pour avoir accepté d'être respectivement président du jury et examinateur.

Je tiens ensuite à remercier vivement Frédéric Feyel et Sylvie Michel-Ponnelle, respectivement directeur de thèse et encadrant industriel, pour avoir fait en sorte que ces trois années se déroulent dans d'excellentes conditions, que ce soit sur le plan de l'encadrement scientifique et technique ou sur le plan humain. Merci pour avoir été toujours disponibles, et pour m'avoir soutenu tout au long de ce travail. Je souhaite ensuite remercier les personnes qui n'ont pas directement encadré cette thèse, mais qui l'ont suivie de près : merci à Eric Lorentz et Jérôme Laverne pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée.

Merci également à Mathilde Valdenaire pour sa contribution à ce travail lors de son stage de fin d'études.

Pour ces trois années passées à la R&D d'EDF, et pour le cadre de travail très agréable au quotidien, je tiens à remercier chaleureusement (sans les nommer, car la liste est plutôt longue) l'ensemble des personnes que j'ai pu côtoyer durant cette période passée au département AMA et au LaMSID.

Enfin, un grand merci à ma famille, à mes amis, bref, à tous mes proches. Merci encore d'être venus me supporter le jour de la soutenance. Une mention spéciale à ma mère pour avoir éliminé force coquilles de ce manuscrit ! Puis une mention toute particulière à toi, Claire, pour ton amour et ton soutien qui ont rendu ces années bien plus joyeuses.



# Table des matières

Introduction générale.....	9
----------------------------	---

---

Chapitre 1 : Modèles continus et discontinus de fissuration.....	15
---	----

---

1 Modèles d'endommagement continu .....	17
1.1 Mécanique continue de l'endommagement.....	17
1.2 Modèles d'endommagement local élastique fragile isotrope .....	18
1.2.1 Equations constitutives .....	18
1.2.2 Formalisme des matériaux standard généralisés .....	20
1.2.3 Application à une loi d'endommagement fragile.....	21
1.3 Formulation énergétique globale.....	22
1.4 Phénomène de localisation .....	24
1.5 Limiteurs de la localisation : les principales techniques de régularisation .....	26
1.5.1 Régularisation spatiale de variables locales.....	27
1.5.2 Milieux enrichis par une description microscopique .....	30
1.5.3 Formulation à gradient de variable interne .....	31
1.5.4 Choix de la méthode de régularisation.....	34
2 Modèles de zones cohésives.....	35
2.1 Origine des modèles cohésifs.....	35
2.2 Formulation énergétique .....	36
2.3 Discrétisation spatiale .....	38
2.3.1 Élément fini d'interface.....	38
2.3.2 Éléments à discontinuité intégrée.....	41
2.3.3 Méthode des éléments finis étendus.....	42
3 Cohérence entre les modèles continus et discontinus.....	44
3.1 Constructions de courbes-R équivalentes .....	44
3.2 Paramètres de l'étude .....	45
3.2.1 Maillages.....	45
3.2.2 Modélisations .....	46
3.3 Etude comparative des différents modèles.....	48
3.3.1 Convergence des solutions avec le raffinement du maillage .....	48
3.3.2 Comparaison des réponses globales.....	49
3.3.3 Comparaison des tailles de process zones.....	50
3.3.4 Comparaison locale des champs au voisinage de la fissure .....	53

---

## Chapitre 2 :

Passage d'un modèle continu régularisé à un modèle cohésif.....	55
---	----

---

1 Approches continues - discontinues dans la littérature .....	57
1.1 Construction de modèles discontinus équivalents.....	58
1.2 Approches couplées continues - discontinues.....	60
1.2.1 Transition à endommagement ultime.....	60
1.2.2 Transition avant rupture : transfert local d'énergie.....	62
1.3 Bilan.....	64
2 Etude semi-analytique unidimensionnelle.....	66
2.1 Description du problème continu.....	66
2.2 Solution pour la formulation à gradient de variable interne.....	68
2.3 Solution pour la formulation à gradient implicite .....	71
2.3.1 Mise en équations.....	71
2.3.2 Résolution dans la partie linéaire .....	72
2.3.3 Résolution dans la partie non linéaire .....	73
2.3.4 Bilan.....	75
2.3.5 Intégration numérique.....	76
2.3.6 Choix du facteur de rigidité .....	78
2.3.7 Influence des paramètres du facteur rigidité .....	79
2.3.8 Récapitulatif de la méthode de résolution.....	82
2.4 Choix de la formulation non locale .....	83
2.5 Passage du modèle continu au modèle discontinu .....	86
2.5.1 Identification d'une loi d'interface équivalente .....	86
2.5.2 Passage du modèle non local au modèle cohésif.....	88
2.5.3 Récapitulatif de la méthode d'identification de lois cohésives de transition .....	92
3 Extension au cadre éléments finis en dimension deux et trois .....	94
3.1 Discrétisation spatiale .....	94
3.1.1 Élément fini mixte non local à gradient d'endommagement .....	94
3.1.2 Élément fini mixte d'interface pour les modèles de zones cohésives .....	95
3.2 Algorithme de couplage explicite .....	97
3.2.1 Hypothèses.....	97
3.2.2 Algorithme .....	99
3.2.3 Pilotage du chargement.....	102

---

## Chapitre 3 :

Simulations numériques.....	105
-----------------------------	-----

---

1 Barre fragile en traction.....	107
2 Éprouvette DCB trapézoïdale.....	110
3 Plaque trouée .....	119
4 Vers une extension tridimensionnelle .....	122

---

Conclusion générale .....	129
---------------------------	-----

---

Annexes.....	133
--------------	-----

---

1 Annexe 1 : EF mixte non local à gradient d'endommagement dans Code_Aster .....	134
1.1 Rappel de la formulation mixte continue et semi – discrétisée en temps.....	134
1.2 Discrétisation.....	135
1.3 Intégration du comportement .....	135
1.4 Résolution globale.....	138
1.5 Choix des éléments finis .....	139
2 Annexe 2 : EF mixte d'interface pour les CZM dans Code_Aster.....	141
2.1 Rappel de la formulation mixte continue semi – discrétisée en temps.....	141
2.2 Discrétisation.....	141
2.3 Intégration du comportement .....	142
2.4 Résolution globale.....	142
2.5 Choix des éléments finis .....	143

---

Bibliographie .....	145
---------------------	-----

---





# Introduction générale

---

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention CIFRE (Conventions Industrielles de Formation par la REcherche) entre le Centre des Matériaux de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris et le département Analyses Mécaniques et Acoustique d'EDF R&D (Recherche et Développement).

## Contexte industriel

Afin de garantir la maîtrise de son parc de production d'électricité, EDF doit en tant qu'exploitant s'assurer du bon fonctionnement de ses installations et justifier de la mise en exploitation, de la réparation ou du remplacement de leurs composants. Si les enjeux de sûreté portent sur l'ensemble du parc, les normes de sécurité sont plus sévères lorsqu'elles concernent les installations de la filière nucléaire. La volonté de prolonger la durée de fonctionnement des centrales nucléaires jusqu'à soixante ans vient d'autant plus renforcer la problématique de sûreté : il est indispensable de démontrer la tenue mécanique des différents composants (et notamment ceux qui ne sont pas remplaçables) en prenant en compte le vieillissement des matériaux, en conditions de fonctionnement et en conditions accidentelles. Outre la sûreté, la recherche d'une disponibilité optimale des équipements constitue également un fort enjeu, puisqu'il est directement lié à des considérations d'ordre financier. Dans la plupart des situations, l'ingénierie de l'entreprise a recours à des règles codifiées, conservatives, définies dans un périmètre bien précis et partagées avec l'Autorité de Sûreté Nucléaire (ASN). Lorsque l'on sort du cadre de la codification, les études de l'ingénierie s'appuient alors sur la simulation numérique, éventuellement complétée par des essais lorsque cela est possible.

L'une des missions d'EDF R&D consiste à anticiper ce besoin en développant des modèles numériques dont les codes de calcul sont le support. Dans le domaine de la mécanique des structures, la division R&D développe depuis 1989, sous Assurance Qualité, un logiciel de simulation numérique : *Code\_Aster*<sup>1</sup> (Analyse des Structures et Thermo-mécanique pour des Études et des Recherches), mis depuis 2001 à la disposition du public sous licence GPL (GNU General Public License). Ce code de calcul par éléments finis constitue un outil de capitalisation des recherches et des méthodologies d'étude proposées par la R&D, et également un moyen de les transférer vers l'ingénierie. C'est l'outil de simulation sur lequel nous nous sommes appuyés pour réaliser ce travail de thèse.

Cette thèse a été lancée dans le cadre d'un projet de recherche transverse ayant pour objectif d'améliorer la fiabilité, la robustesse, et la performance des calculs par éléments finis en mécanique de l'endommagement. En effet, pour de nombreux composants, EDF cherche à quantifier l'état de dégradation sous chargements de fonctionnement et/ou accidentels. Citons par exemple les

---

<sup>1</sup> Site web : [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)

enceintes de confinement, les barrages, les sites de stockage de déchets radioactifs (à l'étude), les cuves... Cette thèse vise à proposer un cadre méthodologique permettant de simuler la propagation de fissures, en prenant en compte les mécanismes d'endommagement, et qui pourrait ensuite être décliné aux différents domaines d'applications selon leurs spécificités (matériaux ductiles ou fragiles, nature du chargement...). Dans le cadre de cette étude, les applications numériques ont été réalisées avec des caractéristiques matériaux représentatives du béton, et sur des structures dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de celles d'ouvrages de génie civil. En effet, en l'absence d'un cadre réglementaire aussi poussé que pour les structures en acier, les besoins de simulations peuvent être plus importants pour ce type d'ouvrage.

## Contexte scientifique

Parmi les approches permettant de modéliser la propagation de fissures dans une structure, la mécanique linéaire de la rupture reste aujourd'hui la plus utilisée par les ingénieurs. Elle remonte aux travaux de Griffith [Griffith, 1921] dans le cadre des matériaux fragiles, et a connu un réel essor suite aux travaux d'Irwin [Irwin, 1957]. Cette approche globale est formulée pour des évolutions quasi-statiques en termes de taux de restitution d'énergie élastique  $G$  : une fissure ne peut se propager tant que  $G < G_c$ , où  $G_c$  désigne la ténacité du matériau encore appelée énergie de rupture. En pratique, la plupart des matériaux exhibent une zone non linéaire en amont de la pointe de fissure ; lorsque celle-ci est relativement étendue par rapport aux dimensions de la structure considérée, le recours à des modèles non linéaires de mécanique de la rupture tels que l'intégrale de Rice [Rice, 1968] s'avère nécessaire. Dans le cas des matériaux ductiles comme les aciers, la majeure partie de cette zone non linéaire est caractérisée par une dissipation plastique, tandis que dans le cas des matériaux qualifiés de quasi-fragiles comme le béton, la dissipation plastique y est négligeable et cette zone reste essentiellement caractérisée par un comportement adoucissant de type endommageable : on parle alors de *fracture process zone*. De plus, la taille de cette *process zone* n'est pas négligeable devant les dimensions de la structure dans le cas des matériaux quasi-fragiles.

Parallèlement à la mécanique de la rupture, la mécanique de l'endommagement, qui constitue une approche locale et continue, a été développée à partir des travaux de Kachanov [Kachanov, 1958]. Elle consiste à représenter l'évolution irréversible de la répartition de défauts microscopiques dans un matériau par celle d'un champ macroscopique moyen, dont le stade ultime correspond à l'apparition de macro fissure(s). Cette approche a été ensuite développée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles avec le formalisme des matériaux standard généralisés [Halphen et Nguyen, 1975], ce cadre fournissant une loi d'évolution de la variable d'endommagement tout en vérifiant systématiquement le second principe de la thermodynamique. Cependant, dans le cas des matériaux adoucissants, cette approche n'est devenue véritablement utilisable (voire physiquement acceptable) en calcul de structure qu'à partir de l'introduction des méthodes de régularisation (encore appelées limiteurs de localisation), visant à pallier le phénomène de localisation qui se traduit lors d'analyses éléments finis par une dépendance sévère des solutions au maillage. Avec ce type de méthode, le principe d'état local n'est plus vérifié : le comportement d'un point de la structure n'est plus uniquement défini par l'histoire mécanique locale mais par celle d'un voisinage non nul défini par une longueur interne. On parle alors de modèle d'endommagement non local.

Enfin, les modèles dits cohésifs (CZM pour *Cohesive Zone Model*) remontant aux travaux de Dugdale [Dugdale, 1960] et Barenblatt [Barenblatt, 1962] représentent une approche pouvant

être qualifiée d'intermédiaire entre les deux précédentes (mécanique de la rupture et endommagement continu). Le processus de fissuration est décrit en définissant une énergie de surface dépendant du saut de déplacement entre les lèvres de la fissure, et en minimisant l'énergie totale de la structure par rapport au champ de déplacement. La loi d'endommagement surfacique dérivant de l'énergie de surface régit alors le comportement de la *process zone* qui constitue une zone de transition entre vraie fissure et matériau sain, à travers laquelle le déplacement est discontinu et le vecteur contrainte non nul.

Si ces modèles continus et discontinus visent à décrire le processus de fissuration, ils ne permettent pas d'en modéliser toutes les étapes dans la mesure où chacun d'entre eux renferme certaines limitations qui lui sont propres. Plus précisément :

- La mécanique de la rupture est fondée sur une description cinématique réaliste des fissures (séparation matérielle) puisqu'elles sont modélisées comme des surfaces de discontinuité du champ de déplacement. Le critère de Griffith ne permet cependant que d'en étudier la propagation, puisqu'en l'absence de forte singularité géométrique initiale (entaille), il ne permet pas de modéliser l'apparition d'une fissure dans une structure saine. De plus, ce critère ne permet pas de prédire seul le trajet de fissuration puisqu'il est uniquement formulé en termes d'aire fissurée, et ne prend pas en compte la direction de propagation.
- Les modèles de zones cohésives sont considérés comme une amélioration de la théorie de Griffith dans la mesure où ils permettent de lever le problème de l'initiation de la fissuration dans une structure saine, tout en préservant une description discontinue. Leur mise en œuvre directe dans le cadre de la méthode des éléments finis, et dans le cas de maillages quelconques, ne semble toutefois opérationnelle que lorsque le trajet de fissuration est connu au préalable.
- Les modèles d'endommagement non locaux sont quant à eux capables de traiter à la fois l'initiation et la propagation, mais également de capter le trajet de fissuration : une fissure est alors vue comme la localisation du champ d'endommagement. Cependant, le caractère continu de la formulation impose de considérer les zones fissurées comme celles où la perte de rigidité est totale, la contrainte y est alors nulle mais elles restent le lieu de déformations importantes dues à un champ de déplacement continu. Ce point peut s'avérer problématique lorsque l'on souhaite quantifier une ouverture de fissure, ou prendre en compte le contact entre les lèvres en cas de refermeture.

Afin de décrire correctement le processus de fissuration dans son intégralité, des approches mixtes continues / discontinues ont été proposées dans la littérature. Elles consistent à combiner les deux formulations dans un même modèle éléments finis ; l'initiation ainsi que les mécanismes de dégradation sont alors décrits par le modèle d'endommagement continu, qui permet également de localiser le lieu où les discontinuités doivent être insérées. Dans la plupart des travaux traitant du sujet, les discontinuités (surfaces libres) sont introduites lorsque l'endommagement est total. Quelques auteurs ont également recours à des modèles de zones cohésives afin d'insérer les discontinuités lorsque l'endommagement n'est que partiel, ce qui permet de contourner les difficultés numériques pouvant être rencontrées lorsque ce dernier atteint sa valeur ultime. Il

convient alors de transférer l'énergie restant à dissiper par le modèle continu vers le modèle cohésif, ce qui s'avère être un point délicat.

### Objectifs du travail de thèse

L'objectif principal de cette thèse réside dans le développement d'une approche mixte continue / discontinue pour des mécanismes de rupture quasi-fragile, dans le cas d'évolutions quasi-statiques et en petites déformations. Elle s'inscrit en complémentarité de la thèse École des Mines de Paris / ONERA de Feld-Payet [Feld-Payet, 2010], dans laquelle est proposée une méthodologie permettant d'assurer la transition endommagement ductile – fissuration pour des situations 2D et 3D, en insérant, via des techniques de remaillage, des fissures libres au niveau des zones totalement endommagées.

Notre objectif est de traiter en premier lieu le problème de la conservation de l'énergie entre les états endommagés et les états fissurés, qui, comme nous le verrons par la suite, peut être assurée en introduisant des discontinuités de nature cohésive ; dans ce cas, le passage du modèle continu au modèle discontinu introduit une notion d'endommagement critique. Afin de conserver une indépendance des solutions numériques par rapport au maillage, l'emploi de modèles non locaux pour décrire la partie volumique de l'endommagement semble indispensable : l'insertion de fissures cohésives ne doit donc pas être vue comme un limiteur de localisation, elle ne sert qu'à introduire une description cinématique discontinue du processus de fissuration.

En revanche, la question de la détermination du trajet de fissuration (traitée dans le cadre de la thèse de Feld-Payet) ne sera pas abordée dans le cadre de notre étude.

### Plan du mémoire

Ce mémoire s'articule en trois chapitres. Le premier a pour vocation de présenter les modèles continus et discontinus de fissuration permettant de simuler la propagation de fissures dans un milieu quasi-fragile. Dans le cas de la mécanique continue de l'endommagement, on rappelle notamment les techniques de régularisation spatiale permettant de traiter le phénomène de localisation, afin de dégager celles qui nous paraissent les plus appropriées dans le cadre de notre étude. On présente ensuite les modèles de zones cohésives ainsi que les principales méthodes de discrétisation permettant de les mettre en œuvre dans le cadre de la méthode des éléments finis. Enfin, ce chapitre se termine par une étude comparative visant à évaluer la cohérence entre ces modèles de fissuration (mécanique linéaire de la rupture, modèle de zones cohésives et endommagement non local) dans le cas simple d'une simulation éléments finis 2D de propagation de fissure en mode I. Cette étude vise à comparer tant les réponses globales (courbes force – déplacement, courbes de résistance...) obtenues avec chaque modèle que la description locale de la fissure (taille de la *process zone*, ouverture de fissure...) afin d'évaluer dans quelle mesure une transition entre ces modèles peut être envisagée.

Le deuxième chapitre est consacré à la construction même de l'approche continue / discontinue. Après une revue bibliographique des travaux portant sur le sujet, nous proposons une approche semi-analytique construite sur la base d'un problème unidimensionnel (barre fragile en traction), permettant de passer d'une solution localisée du champ d'endommagement à l'ouverture d'une interface cohésive. Cette étude consiste dans un premier temps à déterminer et comparer les solutions analytiques obtenues pour le modèle continu avec deux formulations non locales distinctes (régularisation de la déformation par une délocalisation à gradient implicite, et formulation

énergétique à gradient d'endommagement) afin de n'en retenir qu'une seule par la suite. La seconde étape vise à déterminer à partir du modèle d'endommagement régularisé une loi cohésive lui étant énergétiquement équivalente. On démontre alors que cette dernière constitue une courbe maîtresse à partir de laquelle on peut automatiquement identifier, étant donné un niveau d'endommagement « critique », une loi d'interface permettant de basculer de la solution continue localisée vers un modèle de zone cohésive en transférant de manière exacte l'énergie restant à dissiper par le modèle non local. On clôt ce chapitre en proposant une extension de cette approche aux situations 2D (et 3D) éléments finis dans le cas de la propagation de fissures rectilignes (et planes) en mode I. Elle repose sur une méthode de couplage explicite qui permet d'autoriser l'ouverture graduelle d'éléments cohésifs à mesure que l'endommagement se développe en pointe de fissure et dépasse une valeur critique, les lois cohésives mises en jeu sont alors déterminées dynamiquement au cours du calcul en s'appuyant sur les résultats unidimensionnels afin d'assurer localement l'équivalence énergétique.

Le dernier chapitre présente des résultats de simulations menées avec cette approche. Après avoir validé certaines briques élémentaires de son implémentation sur un cas test simple, elle est d'abord mise en œuvre sur deux cas bidimensionnels de propagation stable et instable. Ces simulations permettent d'étudier l'influence du paramètre d'endommagement critique sur la réponse globale de la structure ainsi que sur la description locale de la fissure. Afin d'évaluer la pertinence de ces résultats, ils sont comparés avec ceux obtenus pour les modèles continus et discontinus obtenus au premier chapitre. Enfin, une première extension de cette approche aux situations tridimensionnelles est testée dans le cas de la simulation de la propagation d'un front de fissure courbe.



# Chapitre 1

## Modèles continus et discontinus de fissuration

---

1 Modèles d'endommagement continu .....	17
1.1 Mécanique continue de l'endommagement.....	17
1.2 Modèles d'endommagement local élastique fragile isotrope .....	18
1.2.1 Equations constitutives.....	18
1.2.2 Formalisme des matériaux standard généralisés .....	20
1.2.3 Application à une loi d'endommagement fragile .....	21
1.3 Formulation énergétique globale.....	22
1.4 Phénomène de localisation .....	24
1.5 Limiteurs de la localisation : les principales techniques de régularisation.....	26
1.5.1 Régularisation spatiale de variables locales .....	27
1.5.2 Milieux enrichis par une description microscopique.....	30
1.5.3 Formulation à gradient de variable interne.....	31
1.5.4 Choix de la méthode de régularisation .....	34
2 Modèles de zones cohésives.....	35
2.1 Origine des modèles cohésifs.....	35
2.2 Formulation énergétique .....	36
2.3 Discrétisation spatiale .....	38
2.3.1 Élément fini d'interface.....	38
2.3.2 Éléments à discontinuité intégrée.....	41
2.3.3 Méthode des éléments finis étendus.....	42
3 Cohérence entre les modèles continus et discontinus.....	44
3.1 Constructions de courbes-R équivalentes.....	44
3.2 Paramètres de l'étude .....	45
3.2.1 Maillages .....	45
3.2.2 Modélisations .....	46
3.3 Etude comparative des différents modèles.....	48
3.3.1 Convergence des solutions avec le raffinement du maillage.....	48
3.3.2 Comparaison des réponses globales .....	49
3.3.3 Comparaison des tailles de process zones .....	50
3.3.4 Comparaison locale des champs au voisinage de la fissure .....	53

---

Ce chapitre est consacré dans un premier temps à l'étude bibliographique des modèles d'endommagement continus classiquement utilisés pour modéliser le comportement de matériaux quasi-fragiles, ainsi que des méthodes de régularisation auxquelles ces modèles doivent nécessairement être associés afin de garantir leur fiabilité lorsqu'ils sont mis en œuvre en calcul de structures par éléments finis.

Ensuite, les modèles de fissuration discontinus de type modèles de zones cohésives sont également passés en revue.

Enfin, nous terminons ce chapitre par une étude comparative en mettant en œuvre ces modèles dans le cadre de la méthode des éléments finis afin de simuler le problème simple de la propagation d'une fissure rectiligne en mode I dans une structure bidimensionnelle.



# 1 Modèles d'endommagement continu

## 1.1 Mécanique continue de l'endommagement

La mécanique continue de l'endommagement (CDM pour *continuum damage mechanics*) constitue aujourd'hui un outil de modélisation qui trouve son application pour de nombreux mécanismes de rupture et pour un grand nombre de familles de comportements matériaux. Le formalisme exposé dans [Lemaitre et Chaboche, 1985] et reposant sur une description thermodynamique de l'évolution irréversible de l'endommagement en tant que variable interne rassemble dans un cadre unifié l'ensemble des travaux remontant à [Kachanov, 1958]. L'endommagement peut être introduit comme la mesure de l'ensemble des micro-dégradations (nombre et taille des fissures, défauts, et vides microscopiques) vu par un volume élémentaire représentatif (VER) d'un matériau considéré soumis à certaines sollicitations.

L'endommagement peut être couplé à d'autres mécanismes irréversibles suivant le type de matériau considéré et/ou le type de phénomènes que l'on souhaite modéliser. Dans le cas de la rupture ductile, qui concerne notamment de nombreux métaux à température ambiante, il est associé à la germination, à la croissance puis à la coalescence de micro-cavités et peut être défini comme la porosité (rapport entre le volume de la cavité et le volume total du VER), dont l'évolution s'accompagne de grandes déformations plastiques qui doivent être prises en compte. La nature du chargement appliqué peut également influencer sur les mécanismes d'endommagement, comme c'est le cas en fatigue : un chargement cyclique peut entraîner la rupture d'un matériau sous des contraintes inférieures à la limite d'élasticité observée pour un chargement monotone. Cet endommagement de fatigue est dû à l'apparition de fissures microscopiques lors des premiers cycles, dont la propagation (lente) s'opère à chaque cycle de sollicitation. Pour les matériaux qualifiés de quasi-fragiles (parmi lesquels on peut citer les bétons, roches ou certains aciers irradiés à température ambiante), l'évolution d'un endommagement peut être observée dans le régime de petites déformations, sous des chargements monotones, et en absence de déformations irréversibles notables. Ce type d'endommagement fragile constitue donc le seul mécanisme dissipatif conduisant à la ruine et peut être modélisé par une dégradation progressive des propriétés élastiques du matériau qui, en l'absence d'évolution de l'endommagement, est considéré comme élastique linéaire.

Notre étude se borne aux mécanismes d'endommagement quasi-fragile. Dans sa version la plus simplifiée, cette théorie s'appuie sur l'hypothèse d'isotropie qui suppose que la distribution spatiale des micro-défauts reste la même dans toutes les directions. L'endommagement peut alors être considéré comme un champ scalaire, que l'on notera  $a$  par la suite, défini sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  occupé par le matériau (dans le cas anisotrope, la variable d'endommagement devient une grandeur tensorielle). En général, la variable d'endommagement est définie comme variant continûment dans l'intervalle  $[0,1]$ ,  $a = 0$  correspondant à l'état sain du matériau et  $a = 1$  à sa dégradation totale, ce qui à l'échelle d'une structure correspond à l'apparition de macro-fissures. Afin de rattacher cette variable à des grandeurs physiques mesurables, on utilise souvent une définition de  $a$  basée sur la diminution de la section effective d'un VER (voir [Lemaitre et Chaboche, 1985]), qui conduit à la notion de contrainte effective. Si  $S$  désigne l'aire d'une section

du VER et  $\hat{S}$  l'aire de la fraction de cette section supportant effectivement les contraintes, l'endommagement isotrope  $a$  peut être défini par :

$$a = 1 - \frac{\hat{S}}{S} \quad (1 - 1)$$

On introduit ensuite  $\hat{\sigma}$  le tenseur des contraintes effectives (s'appliquant sur les surfaces utiles) vu par le VER endommagé, et  $\sigma$  le tenseur des contraintes vu par un VER fictif constitué d'un matériau sain dont le comportement serait équivalent au comportement global du VER dégradé pour un état d'endommagement donné. Dans ce cas  $\sigma$  représente donc le tenseur des contraintes de Cauchy usuel satisfaisant les équations d'équilibre. En considérant le même effort  $\mathbf{F}$  appliqué à chacun de ces deux VER on a :

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}}{\hat{S}} \quad \text{et} \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}}{S} \quad (1 - 2)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal à une section  $S$  (et donc à  $\hat{S}$ ) pouvant être choisie quelconque d'après l'hypothèse d'isotropie. Il en découle la relation entre  $\sigma$  et  $\hat{\sigma}$  :

$$\sigma = \frac{\hat{S}}{S} \hat{\sigma} \Rightarrow \sigma = (1 - a) \hat{\sigma} = (1 - a) \mathbf{E} : \varepsilon \quad (1 - 3)$$

avec  $\mathbf{E}$  le tenseur de Hooke caractérisant l'élasticité du matériau sain (non fictif). On en tire l'expression du tenseur de Hooke effectif du matériau endommagé  $\hat{\mathbf{E}}$  :

$$\hat{\mathbf{E}} = (1 - a) \mathbf{E} \quad (1 - 4)$$

Ainsi, à mesure que l'endommagement se développe, le matériau offre de moins en moins de résistance, ce qui se traduit par une diminution de la contrainte, qui devient nulle pour un point totalement détérioré. Ce type de comportement est qualifié d'adoucissant.

## 1.2 Modèles d'endommagement local élastique fragile isotrope

### 1.2.1 Equations constitutives

Ces modèles visent à décrire le comportement fragile d'un matériau en s'appuyant d'une part sur la théorie de l'élasticité linéaire précédemment décrite, et d'autre part sur l'évolution d'une variable scalaire d'endommagement caractérisant sa dégradation irréversible. Le qualificatif « local » est ici employé afin de souligner que cette description s'effectue à l'échelle du point matériel, sans que soit pris en compte l'état du matériau dans un voisinage de ce point. Ces lois de comportement fragiles doivent donc inclure la définition d'un domaine d'élasticité au sein duquel l'endommagement ne peut évoluer (associée à une loi d'évolution de la variable

d'endommagement), ainsi qu'une énergie de rupture correspondant à la quantité d'énergie devant être dissipée en un point matériel pour le faire passer de son état initialement sain à l'état d'endommagement total.

Pour ce type de loi, la relation contrainte - déformation est élastique, et la perte de rigidité due au champ d'endommagement  $a$  est paramétrée par une fonction  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dépendant de ce dernier :

$$\boldsymbol{\sigma} = A(a)\mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (1 - 5)$$

L'expression de  $A$  la plus fréquemment choisie dans la littérature est  $A(a) = 1 - a$ , comme cela a été introduit dans (1 - 3) en définissant l'endommagement en terme de surfaces utiles (1 - 1). Ce choix peut cependant être étendu à toute fonction vérifiant certaines propriétés, qui se résument à :

- i.  $A$  est continue, dérivable, et convexe sur  $[0,1]$  et  $A([0,1]) = [0,1]$
  - ii.  $A(0) = 1$  (état sain) et  $A(1) = 0$  (endommagement total)
  - iii.  $A$  est strictement décroissante sur  $[0,1]$  (adoucissement)
- (1 - 6)

La définition du domaine élastique passe par celle d'une fonction seuil  $f$  généralement définie dans l'espace des déformations pour ce type de modèle. Soit  $\tilde{\varepsilon}$  une mesure positive du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , qualifiée de déformation équivalente, et  $\kappa$  une variable interne irréversible définie comme la valeur maximale de  $\tilde{\varepsilon}$  atteinte au cours de l'histoire du chargement. La fonction seuil  $f$  peut être définie par :

$$f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa$$

avec  $\kappa = \max_t(\tilde{\varepsilon})$

(1 - 7)

L'évolution de la variable d'endommagement  $a$  est quant à elle donnée par une relation biunivoque entre  $a$  et  $\kappa$ , faisant intervenir des paramètres matériaux ( $a$  minima une valeur initiale  $\kappa_0$  définissant le domaine d'élasticité du matériau sain), et permettant de définir la réponse uniaxiale contrainte – déformation du point matériel :

$$a = a(\kappa) \quad (1 - 8)$$

Afin de distinguer les décharges élastiques des phases endommageantes, le domaine d'élasticité ne doit croître que lorsque l'endommagement évolue ( $\dot{a} > 0$ , *i.e.*  $\dot{\kappa} > 0$ ) de sorte à rester sur la surface de charge lors d'une telle évolution. Ceci se traduit mathématiquement par les conditions de Kuhn-Tucker suivantes :

$$f \leq 0 ; \quad \dot{\kappa} \geq 0 ; \quad f \dot{\kappa} = 0 \quad (1 - 9)$$

Parmi les définitions de déformation équivalente les plus fréquemment utilisées dans la littérature, on peut citer par exemple celle proposée dans [Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989] portant sur la partie positive des déformations principales afin d'introduire une dissymétrie entre traction et compression caractéristique de matériaux comme le béton :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle^2}, \quad \text{où} \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{2}(\varepsilon_i + |\varepsilon_i|) \quad (1 - 10)$$

$(\varepsilon_i)_{i=1,3}$  désignant les déformations principales.

### 1.2.2 Formalisme des matériaux standard généralisés

Le formalisme présenté ci-dessus est utilisé pour construire de nombreux modèles d'endommagement fragile, toutefois, un autre formalisme dit des *matériaux standard généralisés* basé sur l'approche thermodynamique des processus irréversibles, permet de construire (entre autres) de manière systématique ces types de modèles tout en assurant leur admissibilité thermodynamique. Ce cadre théorique développé au cours des années 1970 [Halphen et Nguyen, 1975] repose sur la donnée d'une densité d'énergie libre et d'un potentiel de dissipation dont se déduit la loi de comportement par dérivation de ces derniers. L'état du matériau  $y$  est caractérisé par la déformation  $\varepsilon$  et une variable interne  $a$  (dans notre cas la variable scalaire d'endommagement,  $a$  désignant dans le cas général un jeu de variables internes éventuellement tensorielles), et la densité d'énergie libre  $\Phi$  est définie comme une fonction de ces variables, convexe par rapport à  $\varepsilon$  et par rapport à  $a$  (mais pas nécessairement par rapport au couple  $(\varepsilon, a)$ )

$$\Phi = \Phi(\varepsilon, a) \quad (1 - 11)$$

La contrainte  $\sigma$  et la force thermodynamique  $Y$  associée à  $a$  appelée taux de restitution d'énergie associé à  $a$  sont définies par dérivation de ce potentiel :

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, a) ; \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial a}(\varepsilon, a) \quad (1 - 12)$$

L'évolution de l'endommagement est alors gouvernée par un potentiel de dissipation  $\Psi$  convexe, fonction du taux d'endommagement  $\dot{a}$ , via une condition d'appartenance à son sous-différentiel  $\partial \Psi(\dot{a})$  évalué en  $\dot{a}$  :

$$Y \in \partial \Psi(\dot{a}) ; \quad \text{où} \quad \partial \Psi(\dot{a}) = \left\{ y / \forall a^*, \Psi(a^*) \geq \Psi(\dot{a}) + y.(a^* - \dot{a}) \right\} \quad (1 - 13)$$

La notion de sous-différentiel étend le concept de dérivée aux fonctions convexes non-différentiables, et dans le cas où  $\Psi$  est différentiable on a  $\partial \Psi(\dot{a}) = \{\nabla \Psi(\dot{a})\}$ . Dans le cas des lois à seuil (catégorie de modèles de comportement incluant les modèles d'endommagement fragiles) le potentiel de dissipation  $\Psi$  est non dérivable, et peut être entièrement défini par une fonction seuil convexe  $f$  caractérisant (dans l'espace des forces thermodynamiques  $Y$ ) le domaine élastique à travers la relation :

$$\Psi(\dot{a}) = \sup_{Y; f(Y) \leq 0} (Y\dot{a}) \quad (1 - 14)$$

Des arguments d'analyse convexe permettent alors de montrer que la relation d'appartenance au sous-différentiel de  $\Psi$  est équivalente, dans le cas où  $f$  est différentiable, à une loi d'écoulement ainsi qu'une condition de cohérence portant sur cette dernière :

$$Y \in \partial\Psi(\dot{a}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{a} = \lambda \frac{\partial f}{\partial Y}(Y) \\ f(Y) \leq 0; \lambda \geq 0; \lambda f(Y) = 0 \end{cases} \quad (1 - 15)$$

Le modèle de comportement est considéré comme thermodynamiquement admissible lorsque l'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite, ce qui revient à vérifier la positivité de la dissipation intrinsèque volumique  $\mathcal{D}$  :

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Phi}{\partial a} \dot{a} = Y \dot{a} \quad (1 - 16)$$

Celle-ci se déduit de (1 - 13) en prenant  $a^* = 0$ , et puisque  $\Psi$  est positif et nul en 0 (la dissipation est nulle lorsque la variable interne n'évolue pas), on a :

$$\mathcal{D} = Y \dot{a} \geq \Psi(\dot{a}) - \Psi(0) = \Psi(\dot{a}) \geq 0 \quad (1 - 17)$$

Notons qu'une relation de comportement ne doit pas nécessairement s'inscrire dans ce cadre thermodynamique pour vérifier cette propriété, et c'est le cas de nombreux modèles dont ceux s'appuyant sur le formalisme présenté au paragraphe précédent.

### 1.2.3 Application à une loi d'endommagement fragile

Afin de fixer le cadre de notre étude, le modèle d'endommagement fragile qui sera considéré par la suite repose sur la définition suivante de la densité d'énergie libre  $\Phi$  et du potentiel de dissipation  $\Psi$ , où  $\Phi_{el}$  désigne la densité d'énergie de déformation élastique :

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, a) &= A(a) \Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \text{où} \quad \Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \Psi(\dot{a}) &= k \dot{a} + I_{\mathbb{R}^+}(\dot{a}), \quad \text{où} \quad I_{\mathbb{R}^+}(\dot{a}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{a} \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad k > 0 \end{aligned} \quad (1 - 18)$$

La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  ainsi que le taux de restitution d'énergie  $Y$  associé à  $a$  s'écrivent d'après (1 - 12) :

$$\boldsymbol{\sigma} = A(a) \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} ; \quad Y = -A'(a) \Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (1 - 19)$$

Notons que le potentiel de dissipation est positivement homogène de degré 1 (loi de comportement indépendante de la vitesse de chargement) et non différentiable (loi à seuil). La fonction seuil  $f$  lui étant associée à travers la relation (1 - 14), et caractérisant le domaine élastique dans l'espace des forces thermodynamiques, s'écrit alors simplement :

$$f(Y) = Y - k, \quad k > 0 \quad (1 - 20)$$

Cette fonction de charge étant différentiable, l'évolution de l'endommagement est alors gouvernée, conformément à la relation (1 - 15), par la loi d'écoulement ainsi que la condition de cohérence suivante :

$$Y \in \partial \Psi(\dot{a}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{a} = \lambda \\ f(Y) \leq 0; \lambda \geq 0; \lambda f(Y) = 0 \end{cases} \quad (1 - 21)$$

Ainsi, cette loi de comportement fragile simple peut se résumer au jeu d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \boldsymbol{\sigma} = A(a) \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \text{ii) } Y = -A'(a) \Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \text{iii) } Y - k \leq 0 ; \quad \dot{a} \geq 0 ; \quad (Y - k) \dot{a} = 0 \end{array} \right. \quad (1 - 22)$$

On peut remarquer que l'écriture (1 - 22) reste très proche du formalisme présenté au paragraphe 1.2.1, à la différence près que la fonction de charge  $f$  ne porte pas sur une déformation équivalente mais sur le taux de restitution d'énergie associé à la variable d'endommagement. Son seuil  $k$  étant de plus constant, c'est l'expression choisie pour la fonction  $A$  (qui paramètre la perte de rigidité) qui va, à travers sa dérivée, définir l'évolution de l'endommagement.

## 1.3 Formulation énergétique globale

Le problème mécanique formulé à l'échelle d'une structure peut également être exprimé de manière systématique par une formulation énergétique globale pour les lois de comportement appartenant à la classe des matériaux standard généralisés. Pour cela, la densité d'énergie libre  $\Phi$  et le potentiel de dissipation  $\Psi$  précédemment introduits à l'échelle du point matériel sont étendus à l'échelle de la structure comme cela est fait dans [Germain *et al.*, 1983] :

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}, a) = \int_{\Omega} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(x), a(x)) d\Omega ; \quad D(\dot{a}) = \int_{\Omega} \Psi(\dot{a}(x)) d\Omega \quad (1 - 23)$$

où  $\Omega$  désigne le domaine occupé par la structure.  $F$  et  $D$  sont alors des fonctionnelles dont les arguments sont des champs de variables d'état, et non plus des variables d'état exprimées au point matériel. Lorentz et Andrieux [Lorentz et Andrieux, 2003] montrent qu'après discrétisation en temps de la relation de comportement (elle aussi exprimée à l'échelle globale) par un schéma d'Euler implicite, le problème mécanique désormais incrémental peut être formulé comme un problème de minimisation d'une énergie potentielle (incrémentale) définie par la relation suivante :

$$E_{pot}(\mathbf{u}_{n+1}, a_{n+1}) = F(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}), a_{n+1}) + \Delta t D\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t}\right) - W_{ext}(\mathbf{u}_{n+1}) \quad (1 - 24)$$

où  $W_{ext}$  désigne le travail des efforts extérieurs. Cette énergie dépend du champ  $a_n$  et donc de l'état mécanique de la structure au début du pas de temps  $[t_n, t_{n+1}]$  d'amplitude  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Lorsque le potentiel de dissipation  $\Psi$  est positivement homogène de degré 1 (comme c'est le cas pour le modèle d'endommagement fragile du paragraphe 1.2.3),  $\Delta t$  s'élimine de (1 - 24) :

$$E_{pot}(\mathbf{u}, a) = F(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), a) + D(a - a_n) - W_{ext}(\mathbf{u}) \quad (1 - 25)$$

Dans le cadre des matériaux adoucissants (dans lequel s'inscrit également notre étude),  $E_{pot}$  n'est pas convexe par rapport au couple  $(\mathbf{u}, a)$ , et dans ce cas le problème mécanique est résolu par les minimisations partielles suivantes :

$$\begin{cases} \text{i) } \mathbf{u}_{n+1} = \arg \min_{\mathbf{u} \in KA} E_{pot}(\mathbf{u}, a_{n+1}) \\ \text{ii) } a_{n+1} = \arg \min_a E_{pot}(\mathbf{u}_{n+1}, a) \end{cases} \quad (1 - 26)$$

où  $KA$  désigne l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles. La relation (1 - 26) i) traduit l'équilibre de la structure, puisque l'on déduit de la condition d'optimalité la formulation faible des équations d'équilibre et des conditions limites en effort (avec  $KA^0$  l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles à 0), ainsi que la relation contrainte – déformation :

$$\forall \delta \mathbf{u} \in KA^0, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = W_{ext}(\delta \mathbf{u}), \quad (1 - 27)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), a) \quad (1 - 28)$$

La relation (1 - 26) ii) est quant à elle relative à l'évolution de la variable interne, puisque de la même manière, l'interprétation variationnelle de la condition d'optimalité associée à (1 - 26) ii) conduit à l'expression locale suivante, vérifiée en tout point de  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \Omega, \quad Y \in \partial \Psi(a(x) - a_n(x)) ; \\ &\text{où } Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial a}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(x)), a(x)) \end{aligned} \quad (1 - 29)$$

À chaque pas de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ , le problème spatial peut être résolu numériquement en déplacement par la méthode des éléments finis, les inconnues étant alors les valeurs nodales du champ de déplacement solutions du système non linéaire associé à la formulation faible (discrétisée) (1 - 27). Ce système peut être classiquement résolu par une méthode itérative de type Newton-Raphson, pour laquelle chaque itération de correction requiert (entre autres) l'évaluation aux points d'intégration de la variable d'endommagement par la relation (1 - 29) ainsi que de la contrainte par (1 - 28) à partir du déplacement nodal calculé à l'itération précédente. Notons que si la relation (1 - 29) reste abstraite dans le cas général, dans le cas de la loi de comportement fragile présentée au paragraphe 1.2.3 elle se réduit simplement d'après (1 - 22) ii) et iii) à la résolution de l'équation scalaire (1 - 30) en tout point d'intégration de coordonnées  $x$  :

$$\left| \begin{array}{l} \text{si } -A'(a(x))\Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(x))) - k \leq 0 \text{ alors } a(x) = a_n(x) \\ \text{sinon trouver } a(x) \geq a_n(x) \text{ tel que } -A'(a(x))\Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(x))) - k = 0 \end{array} \right. \quad (1 - 30)$$

## 1.4 Phénomène de localisation

Les calculs éléments finis menés avec ce type de modèle local d'endommagement conduisent à une dépendance sévère des résultats au maillage employé. Ces problèmes aujourd'hui bien connus se traduisent par la concentration de l'endommagement et de la déformation dans une bande dont l'épaisseur reste égale à la taille d'une maille, et dont l'orientation dépend de celle donnée au maillage.

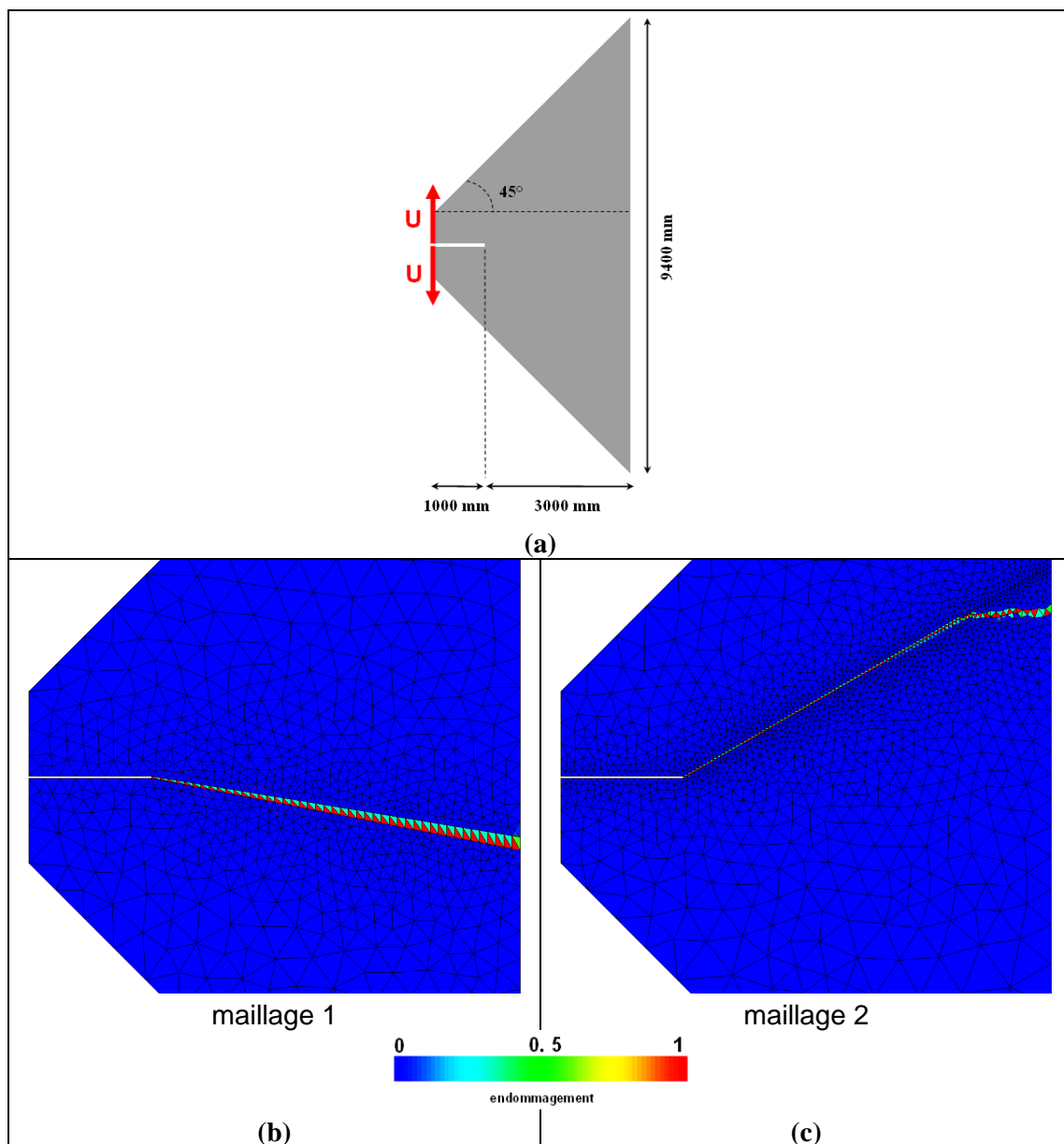
Afin d'illustrer ce problème, nous mettons en œuvre le modèle local d'endommagement fragile du paragraphe 1.2.3 pour simuler par la méthode des éléments finis la rupture d'une éprouvette DCB entaillée dont la géométrie et le chargement (en déplacement imposé) sont détaillés à la Figure 1 - 1 (a). La forme trapézoïdale donnée à l'éprouvette permet de se placer dans le cas d'une propagation stable de fissure, et d'éviter de potentielles bifurcations de celle-ci par rapport au trajet rectiligne initial. Les éléments finis utilisés sont portés par des mailles triangulaires à 3 nœuds, et s'appuient sur une quadrature de Gauss-Legendre à 1 point d'intégration. On réalise le même calcul sur deux maillages distincts, dont l'orientation a été volontairement choisie dès le fond d'entaille en contradiction avec le trajet de fissuration attendu, et pour lesquels la taille de maille est environ divisée par 2 au niveau des zones orientées. Les résultats sont présentés en termes de cartes d'endommagement à la Figure 1 - 1 (b) pour le maillage 1 et (c) pour le maillage 2. Il apparaît clairement que la bande d'endommagement « s'accroche » à la direction privilégiée par l'orientation, et que de plus l'endommagement localise dans une bande dont l'épaisseur correspond à la taille d'une maille le long du trajet suivi. Le premier point montre l'incapacité du modèle à décrire avec fiabilité le trajet de fissuration, et le second a pour conséquence de faire dépendre directement de la taille de maille l'énergie volumique dissipée jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Ceci est confirmé par la Figure 1 - 2 où sont tracées les courbes force – déplacement relatives aux deux maillages : l'énergie dissipée s'exprime comme l'aire située sous chaque courbe, et on constate bien que celle-ci diminue avec la taille de maille. Ces pathologies d'ordre numérique ne sont que l'expression, après discrétisation spatiale des équations continues, d'un problème qui affecte ces dernières, connu sous le nom de phénomène de localisation.

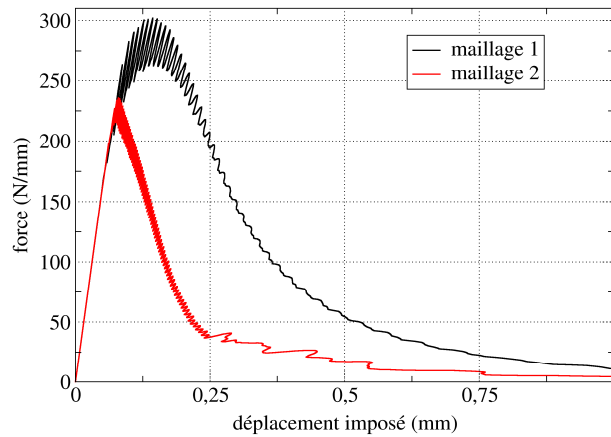
D'un point de vue expérimental, il est observé que lorsqu'un matériau adoucissant est chargé jusqu'à la ruine, des bandes de localisation qui sont en général le lieu de forts gradients de déformation se développent de la fin du régime élastique jusqu'à l'apparition de macro-fissures. Elles peuvent éventuellement présenter un fort taux de microfissuration lorsqu'il s'agit de matériaux quasi-fragiles comme le béton, ou encore être le lieu d'une accumulation importante de déformation plastique dans le cas des matériaux ductiles, comme par exemple les aciers usuels à température ambiante. Dans tous les cas, la taille de ces bandes reste fixe, et ne dépend principalement que du matériau considéré.

En revanche, les modèles de comportement adoucissants basés sur une description locale, et construits dans le cadre des milieux continus classiques (c'est le cas du modèle d'endommagement élastique fragile considéré jusqu'à présent, mais également d'autres modèles d'endommagement plus riches incluant par exemple un comportement plastique), conduisent à des bandes de



localisation dont l'épaisseur tend vers zéro, aboutissant ainsi à une énergie dissipée nulle (voir [Bažant *et al.*, 1984]), ce qui n'est pas en accord avec l'expérience. D'un point de vue physique, ce phénomène de localisation s'explique par le fait que, pour les milieux continus classiques, la construction d'une loi de comportement macroscopique s'appuie sur l'hypothèse qu'en dessous d'une échelle minimale caractérisant le Volume Élémentaire Représentatif (VER), les champs mécaniques sont considérés comme homogènes. Les modèles locaux ne permettent donc pas de respecter cette condition puisqu'ils autorisent, à l'échelle du VER (et même à une échelle aussi petite que l'on veut), le développement de bandes de localisation qui sont le lieu de forts gradients spatiaux. D'un point de vue mathématique, le phénomène de localisation est caractérisé dans [Benallal *et al.*, 1993] par la perte d'ellipticité de l'opérateur tangent, ce qui conduit à un problème mal posé, admettant donc une infinité de solution.



**Figure 1 - 2**

*Courbes force – déplacement obtenues avec les deux maillages.*

Il est donc nécessaire d'incorporer au modèle macroscopique local une information supplémentaire afin d'imposer une taille minimale à la bande de localisation. Ceci revient à introduire une longueur interne, encore appelée longueur caractéristique, définissant pour tout point matériel le voisinage au sein duquel des interactions avec les points voisins doivent être prises en compte. On parle alors de modèle non local, ou de modèle régularisé en espace.

## 1.5 Limiteurs de la localisation : les principales techniques de régularisation

Une des premières idées proposées dans [Bažant et Oh, 1983] afin de garder une certaine objectivité par rapport au maillage consiste à conserver la description locale du comportement adoucissant, et à ajuster en fonction de la taille de maille les paramètres matériaux (relatifs à l'adoucissement) du modèle, partant du constant que l'endommagement localise dans une bande d'une maille d'épaisseur. Cette approche très pragmatique permet de préserver l'énergie de rupture du matériau considéré (en l'occurrence un béton endommageable en traction), mais n'est valide que pour des hypothèses de maillage bien spécifiques et ne corrige en rien la dépendance à l'orientation du maillage.

D'autres méthodes pour lesquelles la description locale du comportement est conservée ont également été développées, mais cette fois en quittant l'hypothèse de matériau indépendant de la vitesse de chargement (*rate-independent material*). On peut citer par exemple l'introduction d'effets visqueux dans le modèle de comportement adoucissant, voir [Needleman, 1988], ou encore les modèle d'endommagement à « effet-retard » (ou « à taux d'endommagement limité ») proposé dans [Ladevèze, 1992] et [Allix et Deü, 1997]. Si ces approches permettent de contrôler le phénomène de localisation spatiale en dynamique, elles ne sont pas adaptées aux analyses quasi-statiques car dans ce cas elles ne font que décaler dans le temps l'apparition de difficultés numériques. Nous nous concentrerons donc dans les paragraphes suivants sur les limiteurs de localisation basés sur une régularisation spatiale, pour lesquels l'hypothèse d'une description locale du comportement adoucissant est abandonnée.

### 1.5.1 Régularisation spatiale de variables locales

Cette méthode de régularisation ne modifie pas la nature des équations du modèle local (équations d'équilibre et relation de comportement), mais celles des variables agissant dans ces dernières. Elle consiste à sélectionner une variable locale  $z$  pouvant être liée soit à la déformation, soit une variable interne, et à lui appliquer un opérateur  $R$  de régularisation spatiale définissant ainsi la variable non locale associée à  $z$  que nous noterons  $\bar{z}$  :

$$\bar{z} = R(z) \quad (1 - 31)$$

#### 1.5.1.1 Opérateurs de régularisation

##### Formulation non locale intégrale

Une première possibilité proposée dans [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] pour un modèle d'endommagement élastique fragile, définit l'opérateur de régularisation comme le produit de convolution entre une fonction de pondération  $\omega$  et la quantité locale  $z$  :

$$\bar{z}(x) = \frac{1}{V(x)} \int_{\Omega} \omega(x-y) z(y) dy, \quad \text{où} \quad V(x) = \int_{\Omega} \omega(x-y) dy \quad (1 - 32)$$

où  $V(x)$  est introduit de telle sorte que la régularisation n'affecte pas les champs constants en espace. Le choix de la fonction de pondération  $\omega$  le plus courant est une gaussienne, comme cela a été proposé dans [Pijaudier-Cabot 1995] :

$$\omega(x-y) = \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{2\ell^2}\right) \quad (1 - 33)$$

où  $\ell$  désigne la longueur caractéristique définissant la taille du volume centré en  $x$  au sein duquel la régularisation est effective. La simplicité de cet opérateur n'est qu'apparente car son implantation dans un code éléments finis soulève certaines difficultés d'ordre algorithmique, dont la principale réside dans le calcul même de la quantité  $\bar{z}$ . En effet, quel que soit le choix de la variable  $z$  à régulariser, le calcul de  $\bar{z}$  est effectué aux points de Gauss lors de la phase d'intégration de la loi de comportement. En temps normal, cette dernière est réalisée de manière complètement autonome d'un élément fini à l'autre, mais il apparaît clairement que la définition de  $\bar{z}$  ne permet pas de préserver cette propriété qui constitue un des atouts de la méthode des éléments finis. D'autres difficultés sont de plus liées à la prise en compte des bords du domaine  $\Omega$  (troncature du support de la fonction de pondération lorsque celui-ci « déborde » de  $\Omega$ ) lors du calcul de l'intégrale non locale (1 - 32).

##### Formulation à gradient implicite

En effectuant un développement limité de la variable locale  $z$  autour du point matériel  $x$  dans la relation (1 - 32), Peerlings *et al.* [Peerlings *et al.*, 1996] définissent un opérateur de

régularisation différentiel dit « à gradient implicite » pour lequel la variable régularisée  $\bar{z}$  est définie implicitement comme la solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire suivante :

$$\forall x \in \Omega, \quad \bar{z}(x) - \ell^2 \nabla^2 \bar{z}(x) = z(x) \quad (1 - 34)$$

où  $\ell$  peut être interprété comme la longueur caractéristique définissant la taille du voisinage du point  $x$  pris en compte pour la régularisation. Pour définir complètement l'opérateur, une condition aux limites portant sur l'inconnue  $\bar{z}$  doit être ajoutée afin d'assurer l'unicité de la solution. Afin d'annuler le terme de bord dû à l'intégration par partie de la formulation variationnelle associée à l'EDP (1 - 34), la condition de Neumann suivante est retenue par les auteurs :

$$\nabla \bar{z} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1 - 35)$$

Ceci permet notamment de ne pas injecter d'énergie supplémentaire dans le système d'équations. Les relations (1 - 34) et (1 - 35) permettent alors d'aboutir à la formulation faible suivante :

$$\forall \delta \bar{z}, \quad \int_{\Omega} \bar{z} \delta \bar{z} d\Omega + \ell^2 \int_{\Omega} \nabla \bar{z} \cdot \nabla \delta \bar{z} d\Omega = \int_{\Omega} z \delta \bar{z} d\Omega \quad (1 - 36)$$

Cette relation montre que cette méthode de régularisation s'adapte mieux que la précédente à son implantation dans un code éléments finis, puisqu'elle ne nécessite alors que l'introduction de l'inconnue nodale supplémentaire  $\bar{z}$  associée au problème linéaire (1 - 36). Notons que cette formulation est déjà implantée dans *Code\_Aster*, l'opérateur de régularisation agissant dans cette version sur le tenseur des déformations entier  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (voir [Godard, 2004]) de telle sorte qu'il reste indépendant de la relation de comportement. En contrepartie d'une plus grande genericité, ce choix conduit à six fois plus de degrés de liberté en dimension trois que si le choix de la variable à régulariser avait porté sur n'importe quelle quantité scalaire.

Enfin, Peerlings [Peerlings, 1999] montre que cette formulation est équivalente à la formulation intégrale dans le cas où la fonction de pondération  $\omega$  agissant dans (1 - 32) est choisie comme la fonction de Green associée à l'EDP (1 - 34). Elle en constitue ainsi un cas particulier.

### 1.5.1.2 Choix de la variable à régulariser

Indépendamment du choix de l'opérateur de régularisation  $R$ , de nombreuses possibilités ont été analysées dans la littérature quant au choix de la variable à délocaliser. On peut citer par exemple le taux de restitution d'énergie associé à la variable d'endommagement dans [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987], une déformation équivalente de Von Mises dans [Peerlings, 1999], le tenseur des déformations dans [Godard, 2004], le champ de déplacement dans [Rodríguez-Ferran *et al.*, 2005], ou encore la déformation plastique cumulée pour un modèle d'endommagement élastoplastique dans [Engelen *et al.*, 2003].

Jirásek [Jirásek, 1998] établit d'ailleurs une comparaison entre les différentes possibilités dans le cas d'un modèle élastique fragile unidimensionnel, et conclut que certaines d'entre elles ne permettent pas d'aboutir à un état de contrainte nulle là où l'endommagement est total. De même, Lorentz et Andrieux [Lorentz et Andrieux, 2003] étudient sous l'angle du problème de minimisation

incrémental (1 - 26) ces différentes possibilités afin de déterminer celles qui permettent de traiter efficacement le problème de localisation (*i.e.* de retrouver le caractère bien posé du problème). Afin d'illustrer les conclusions dégagées par les auteurs, considérons à nouveau le modèle d'endommagement fragile local présenté au paragraphe 1.2.3, et distinguons le cas où la régularisation porte :

- sur la déformation locale (ou sur une quantité s'en déduisant : taux de restitution d'énergie, déformation élastique...). Dans ce cas la régularisation n'est efficace que lorsque la déformation régularisée intervient dans la loi d'évolution des variables internes (minimisation par rapport à  $a$  dans (1 - 26)) et que les équations d'équilibre ainsi que la relation contrainte – déformation (minimisation par rapport à  $\mathbf{u}$  dans (1 - 26)) restent définies à partir de la déformation locale :

$$\begin{aligned} \sigma &= A(a)\mathbf{E} : \varepsilon \\ f(\bar{Y}) &\leq 0 ; \quad \dot{a} \geq 0 ; \quad f(\bar{Y})\dot{a} = 0 ; \quad \text{où } \bar{Y} = Y(\bar{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (1 - 37)$$

- sur la variable interne locale (en l'occurrence l'endommagement  $a$ ). Dans ce cas la régularisation n'est efficace que lorsque l'endommagement régularisé intervient dans les équations d'équilibre ainsi que la relation contrainte – déformation, et que la loi d'évolution de l'endommagement reste inchangée par rapport au modèle de comportement local :

$$\begin{aligned} \sigma &= A(\bar{a})\mathbf{E} : \varepsilon ; \\ f(Y) &\leq 0 ; \quad \dot{a} \geq 0 ; \quad f(Y)\dot{a} = 0 \end{aligned} \quad (1 - 38)$$

Dans un cas comme dans l'autre, les auteurs soulignent que cela conduit à la perte de symétrie de l'opérateur tangent associé aux deux minimisations (1 - 26).

### 1.5.1.3 Limitations de la méthode de régularisation

Dans le cas où la structure contient des fissures préexistantes, le modèle intégral se heurte aux mêmes difficultés que pour la prise en compte des frontières du domaine  $\Omega$  lorsque le support de la fonction de pondération est entièrement traversé par la discontinuité (Figure 1 - 3 (a)).

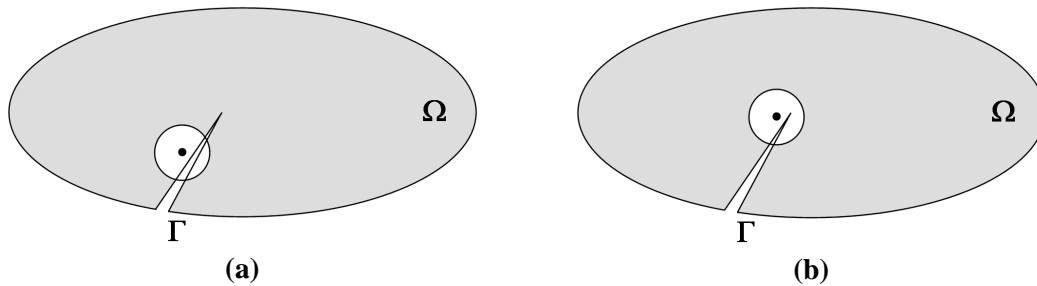


Figure 1 - 3

*Formulation intégrale : support de la fonction de pondération entièrement (a) ou partiellement (b) traversé par une fissure  $\Gamma$  préexistante.*

En revanche, lorsque ce dernier ne l'est que partiellement (Figure 1 - 3 (b)) du fait de la géométrie fortement concave au voisinage de la pointe de fissure, Peerlings [Peerlings, 1999] indique que la fonction de pondération doit être reformulée en termes de plus court chemin au sein de  $\Omega$ , ce qui complique d'autant plus le calcul de l'intégrale non locale. Aussi la formulation à gradient implicite est plus adaptée à ce type de situation puisque la condition de flux nul (1 - 35) est appliquée le long de la discontinuité.

Cependant, lorsque les fissures ne sont pas des données géométriques initiales mais le résultat de la propagation d'une bande endommagée consécutive à l'évolution du chargement (*i.e.* la région de  $\Omega$  dans laquelle l'endommagement vaut 1), les deux méthodes de régularisation conduisent à un étalement non physique de la bande de localisation lorsque l'endommagement devient complet puisqu'aucune condition n'est appliquée afin d'atténuer la contribution des points totalement endommagés dans l'opérateur de régularisation (nous détaillerons davantage ce point au chapitre 2, § 2.4). Certaines contributions apportent des éléments d'amélioration à ce problème inhérent à la méthode de régularisation, on peut citer pour la formulation à gradient implicite le modèle dit « à gradient transitoire » proposé dans [Geers *et al.*, 1998] qui consiste à faire évoluer le paramètre constant  $\ell^2$  définissant la longueur caractéristique dans la relation (1 - 34), de telle sorte que la déformation régularisée reste constante au delà d'une certaine déformation locale critique. On peut également citer la relaxation de l'opérateur de régularisation au-delà d'un endommagement critique dans [Godard, 2004]. Pour la formulation intégrale, Pijaudier-Cabot *et al.* [Pijaudier-Cabot *et al.*, 2010] modifient la notion de distance au point d'évaluation de la variable non locale, en pondérant cette dernière par une fonction qui décroît avec le niveau d'endommagement des points voisins. Cette méthode n'a cependant été implémentée que dans un cadre unidimensionnel. De même Krayani *et al.* [Krayani *et al.*, 2009] proposent de modifier l'expression de la fonction de pondération classique (1 - 33) afin de permettre un traitement spécifique de la régularisation au voisinage de la frontière  $\partial\Omega$  de la structure.

### 1.5.2 Milieux enrichis par une description microscopique

Cette catégorie de méthodes de régularisation consiste à enrichir la cinématique du milieu continu macroscopique classique (milieu de Cauchy) par des champs supplémentaires, indépendants du champ de déplacement et décrivant la cinématique à l'échelle de la microstructure : micro-rotations (milieu de Cosserat), micro-déformations pures... Une revue détaillée de ces méthodes est présentée dans [Forest et Sievert, 2006], ainsi qu'un classement par nombre de degré de liberté supplémentaire croissant (allant de 1 à 12). Une fois la cinématique enrichie, le champ supplémentaire ainsi que son premier gradient sont pris en compte dans l'énergie libre (comme cela est fait pour le déplacement standard dans un milieu de Cauchy), ce qui introduit un effet de voisinage entre points matériels voisins, et par conséquent un caractère régularisant. Ceci conduit à la définition d'un tenseur des déformations généralisées, auquel s'associe par dualité un tenseur des contraintes généralisées : il faut alors définir de nouvelles relations de comportement, ce qui constitue un des inconvénients de ce type d'approche, auquel s'ajoute le choix des conditions aux limites des champs cinématiques supplémentaires.

On peut également inclure dans cette catégorie de modèles les approches dites « du second gradient de déplacement » (voir par exemple [Chambon *et al.*, 2001]), pour lesquelles le champ supplémentaire décrivant la cinématique microscopique est choisi comme le champ de déformation

macroscopique : d'après ce qui précède, cela revient donc à introduire le gradient de la déformation (*i.e.* le second gradient du déplacement) dans l'énergie libre.

### 1.5.3 Formulation à gradient de variable interne

De manière analogue à la formulation à second gradient de déplacement, ce type de formulation repose sur l'introduction du gradient des variables internes dans l'énergie libre (et éventuellement dans le potentiel de dissipation pour le cas le plus général). Cette approche a été initialement développée dans le cadre de la plasticité dans [de Borst et Mühlhaus, 1992] (gradient de la déformation plastique cumulée), puis adaptée à un modèle d'endommagement fragile dans [Frémond et Nedjar, 1996] et [Lorentz et Andrieux, 1999]. Nous détaillons ci-dessous la formulation proposée par ces derniers auteurs, qui consiste à introduire dans l'énergie libre un terme quadratique en gradient d'endommagement et à laisser intact le potentiel de dissipation de la formulation locale. L'énergie potentielle de la structure est alors modifiée de la manière suivante :

$$\bar{E}_{pot}(\mathbf{u}, a) = \bar{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), a) + D(a - a_n) - W_{ext}(\mathbf{u}) \quad (1 - 39)$$

$$\bar{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, a) = \int_{\Omega} \left( \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, a) + \frac{c}{2} (\nabla a)^2 \right) d\Omega, \quad D(a - a_n) = \int_{\Omega} \Psi(a - a_n) d\Omega \quad (1 - 40)$$

où  $\Phi$  et  $\Psi$  désignent respectivement la densité d'énergie libre et le potentiel de dissipation du modèle local, et  $c > 0$  un paramètre constant contrôlant la longueur interne. Notons qu'à ce propos le caractère régularisant est assuré par la présence du terme en gradient d'endommagement, puisque dans le cas d'une localisation trop importante de l'endommagement ce terme pénalise la minimisation de l'énergie.

Les auteurs montrent alors que pour ce type de formulation, la description du comportement à l'échelle du point matériel ne peut plus s'inscrire dans la théorie des matériaux standard généralisés du fait du couplage spatial dû à l'introduction du gradient de la variable interne. Cependant, il est montré que ce cadre standard généralisé peut être retrouvé à l'échelle de la structure : dans ce cas la positivité de la dissipation n'est assurée qu'à un niveau global, et la relation de comportement s'exprime globalement par dérivation (comme cela a été introduit au paragraphe 1.3) de la fonctionnelle énergie libre  $\bar{F}$ .

#### Interprétation ponctuelle

Tenant compte de (1 - 40), la variation d'énergie libre par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}$  s'écrit :

$$\forall \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \left\langle \frac{\partial \bar{F}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \middle| \delta \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (1 - 41)$$

$$\text{avec } \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, a) \quad (1 - 42)$$

Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  au point matériel garde donc sa signification usuelle avec cette formulation à gradient de variable interne, et il en va de même pour les équations d'équilibre puisque la minimisation par rapport au déplacement de l'énergie potentielle (1 - 39) conduit alors à

la formulation variationnelle suivante (1 - 43). Ceci constitue un atout des formulations à gradient de variable interne par rapport aux formulations à cinématique enrichie.

$$\forall \delta \mathbf{u} \in KA^0, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = W_{ext}(\delta \mathbf{u}) \quad (1 - 43)$$

Concernant la loi d'évolution de l'endommagement, elle s'exprime alors de manière globale par l'inclusion différentielle suivante :

$$-\frac{\partial \bar{F}}{\partial a} \in \partial D(a - a_n) \quad (1 - 44)$$

Il est alors possible de redonner une interprétation ponctuelle à cette loi d'évolution qui reste difficilement exploitable telle qu'elle. En écrivant la variation de  $\bar{F}$  par rapport à  $a$ , on aboutit à la relation suivante en effectuant une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \forall \delta a, \quad \left\langle -\frac{\partial \bar{F}}{\partial a} \middle| \delta a \right\rangle &= \int_{\Omega} -\frac{\partial \Phi}{\partial a}(\boldsymbol{\varepsilon}, a) \delta a d\Omega - \int_{\Omega} c \nabla a \cdot \nabla \delta a d\Omega \\ &= \int_{\Omega} -\frac{\partial \Phi}{\partial a}(\boldsymbol{\varepsilon}, a) \delta a d\Omega + \int_{\Omega} c \Delta a \cdot \delta a d\Omega - \int_{\partial \Omega} c \nabla a \cdot \mathbf{n} d\Omega \end{aligned} \quad (1 - 45)$$

Le choix d'une condition de flux nul sur  $\partial \Omega$  permet d'éliminer le terme de bord dans (1 - 45), et de revenir ainsi à interprétation ponctuelle de la loi d'évolution (1 - 44) :

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega, \quad \bar{Y}(x) &\in \partial \Psi(a(x) - a_n(x)), \quad \text{où} \quad \bar{Y} = Y + c \Delta a \\ \nabla a \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega \end{aligned} \quad (1 - 46)$$

où  $\bar{Y}$  peut être défini comme une force thermodynamique non locale, s'exprimant comme la somme de la force thermodynamique du modèle d'endommagement purement local et du laplacien de l'endommagement.

Afin d'illustrer de manière pratique les interprétations ponctuelles (1 - 42) et (1 - 46) de cette formulation non locale, considérons à nouveau le modèle local d'endommagement élastique fragile présenté au paragraphe 1.2.3 et appliquons lui cette méthode de régularisation. Dans ce cas, la relation de comportement au point matériel se résume au jeu d'équations suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{i) } \boldsymbol{\sigma} = A(a) \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \text{ii) } \bar{Y} = -A'(a) \Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}) + c \Delta a \\ \text{iii) } \bar{Y} - k \leq 0 ; \quad \dot{a} \geq 0 ; \quad (\bar{Y} - k) \dot{a} = 0 \\ \text{iv) } \nabla a \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega \end{array} \right. \quad (1 - 47)$$

En comparant (1 - 47) avec le jeu d'équations (1 - 22) caractérisant le modèle local, on constate que la seule différence réside (outre l'introduction d'une condition de Neumann sur la variable d'endommagement) dans l'introduction du terme en laplacien dans la fonction seuil, ce qui lui confère un caractère non local.



## Résolution numérique du problème de minimisation

La relative simplicité des équations (1 - 47) pourrait inciter à discrétiser le problème avec une formulation éléments finis standard en déplacement et à traiter ainsi l'évolution de l'endommagement uniquement aux points d'intégration (comme cela est fait pour la formulation locale), mais le caractère différentiel de la fonction seuil dû au terme en laplacien rend cette tâche délicate. Nous présentons maintenant la manière dont cette formulation non locale, déjà disponible dans Code\_Aster, a été implémentée suivant les travaux de Lorentz et Godard [Lorentz et Godard, 2011].

Le problème est formulé comme un problème de minimisation à l'échelle de la structure, pour lequel l'énergie potentielle (1 - 39) est non linéaire et non différentiable du fait du potentiel de dissipation  $\Psi$ . Les auteurs ont recours à une méthode de décomposition-coordination afin de confiner à un niveau local (au niveau du point d'intégration) cette non différentiabilité ; elle se décline en quatre étapes :

- i) un champ auxiliaire  $\alpha$  supposé égal au champ d'endommagement est introduit en tant qu'argument de la partie non différentiable de l'énergie potentielle :

$$\bar{E}_{pot}(\mathbf{u}, a, \alpha) = \int_{\Omega} (\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + \Psi(\alpha - \alpha_n)) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{c}{2} (\nabla a)^2 d\Omega \quad (1 - 48)$$

- ii) la formulation est augmentée en ajoutant un terme de pénalisation quadratique (avec  $r > 0$ , le coefficient de pénalisation), sans effet tant que la condition  $\alpha = a$  est vérifiée ;
- iii) la contrainte  $\alpha = a$  est ensuite imposée par dualisation, avec  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange, ce qui conduit à la définition du lagrangien augmenté suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\mathbf{u}, a, \lambda, \alpha) = & \int_{\Omega} (\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + \Psi(\alpha - \alpha_n)) d\Omega - W_{ext}(\mathbf{u}) \\ & + \int_{\Omega} \frac{c}{2} (\nabla a)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda (a - \alpha) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{r}{2} (a - \alpha)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (1 - 49)$$

- iv) enfin, les champs  $\mathbf{u}$ ,  $a$ , et  $\lambda$  sont discrétisés aux nœuds avec des fonctions de forme polynomiales de Lagrange, tandis que le champ d'endommagement auxiliaire  $\alpha$  est discrétisé en des points de collocation qui coïncident avec les points d'intégration sur lesquels s'appuie la méthode de quadrature.

Ainsi, à la fin de chaque pas de temps  $[t^n, t^{n+1}]$ , le problème de minimisation revient à rechercher le point-selle du Lagrangien augmenté  $\mathcal{L}_r$  :

$$(\mathbf{u}^{n+1}, a^{n+1}, \lambda^{n+1}, \alpha^{n+1}) \text{ réalisant } \min_{\mathbf{u}} \min_a \max_{\lambda} \min_{\alpha} [\mathcal{L}_r(\mathbf{u}, a, \lambda, \alpha)] \quad (1 - 50)$$

L'étape iv) permet de condenser à un niveau local (points d'intégration) le caractère non différentiable de  $\Psi$ , et de ramener la minimisation par rapport à  $\alpha$  à l'intégration d'une loi de comportement (dépendant directement du modèle d'endommagement local considéré) en ces points. Les variables nodales sont quant à elles déterminées classiquement à l'aide d'un algorithme de

Newton. Tous les détails relatifs à l'implémentation de l'élément fini mixte à gradient d'endommagement associé à la formulation (1 - 49) sont rapportés dans l'annexe 1.

Notons que contrairement à la formulation à gradient implicite, la matrice tangente obtenue est symétrique. Les auteurs soulignent enfin que les résultats numériques obtenus avec ce type de formulation ne conduisent pas à l'élargissement de la bande de localisation lorsque l'endommagement atteint sa valeur ultime.

#### **1.5.4 Choix de la méthode de régularisation**

Les formulations à cinématique enrichie permettent de décrire finement les caractéristiques de la microstructure, mais au prix d'une certaine complexité (généralisation du tenseur des contraintes de Cauchy, choix de conditions aux limites supplémentaires...) et d'un coût de calcul non négligeable. De plus, il ne nous semble pas nécessaire d'avoir recours à une description physique aussi riche pour traiter le problème de localisation dans le cas d'un modèle d'endommagement quasi-fragile (volontairement simplifié, en vue de nos applications).

En comparaison, les méthodes de type régularisation spatiale de variables locales sont plus attractives du point de vue de leur simplicité, et elles traitent de manière efficace le phénomène de localisation. À résultats comparables, les difficultés d'ordre algorithmique que présente la formulation non locale intégrale ne se retrouvent pas pour l'opérateur de régularisation de type gradient-implicite, ce qui milite en faveur de ce dernier. De plus, cette approche reste relativement peu coûteuse tant que la variable non locale reste une variable scalaire. En revanche, nous gardons à l'esprit que l'étalement de la bande de localisation reste un point problématique pour ce type de formulation non locale.

Enfin, la formulation à gradient d'endommagement est assez attractive dans la mesure où son interprétation ponctuelle reste relativement proche de celle du modèle local à régulariser, que le coût de calcul reste acceptable (deux degrés de liberté supplémentaires), et que l'endommagement reste bien confiné dans une bande de largeur contrôlée. En revanche cette formulation est spécifique à chaque loi de comportement locale (nécessité d'implanter une loi « non locale » dédiée pour chaque loi locale considérée).

Nous nous concentrerons donc dans la suite de ce mémoire sur la formulation à gradient implicite (dans le cas où la quantité régularisée est la déformation locale), ainsi que sur la formulation à gradient d'endommagement.

## 2 Modèles de zones cohésives

### 2.1 Origine des modèles cohésifs

Les modèles de zone cohésive (CZM pour *cohesive zone models*) peuvent être considérés comme une amélioration de la théorie de Griffith (mécanique linéaire de la rupture) quant à son incapacité à décrire d'une part l'initiation de fissures (en l'absence de fortes singularités géométriques), et d'autre part à prendre en compte la présence d'une *process zone* se développant en amont de la pointe de fissure. En effet dans le cas des matériaux quasi-fragiles comme le béton, cette *process zone* (encore appelée *fracture process zone*) dans laquelle le matériau subit des dommages adoucissants est de taille non négligeable par rapport aux dimensions de la structure considérée, et la théorie de Griffith ne suffit plus.

Les modèles cohésifs reposent sur l'hypothèse que la *process zone* peut être décrite comme une interface fictive le long de laquelle le champ de déplacement peut admettre des discontinuités, tout en continuant à transmettre des efforts. Cette *process zone* cohésive constitue alors une zone de transition entre le matériau sain et le matériau rompu (voir Figure 1 - 4).

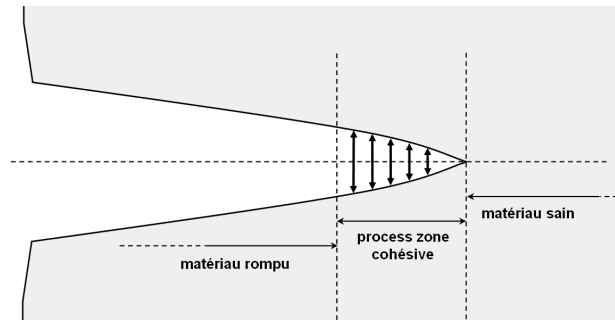


Figure 1 - 4

*Schéma de principe d'une fissure cohésive.*

Ces approches remontent aux années 1960 avec les travaux de Barenblatt [Barenblatt, 1962] et Dugdale [Dugdale, 1960], pour lesquels une zone cohésive est introduite afin de remédier au problème de la singularité du champ de contrainte en fond de fissure. Hillerborg *et al.* [Hillerborg *et al.*, 1976] ont ensuite amélioré ces modèles en introduisant les concepts d'énergie de rupture  $G_f$  (définie comme l'énergie de surface nécessaire pour séparer définitivement les deux lèvres de la fissure en un point de l'interface) et de contrainte critique  $\sigma_c$  (valeur maximale de la contrainte en pointe de fissure au-delà de laquelle la fissure est supposée se propager) qui sont les deux paramètres matériaux caractérisant une loi d'interface. Ces lois d'interface, encore appelées lois cohésives, sont des relations entre le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}$  et le vecteur saut de déplacement  $[[\mathbf{u}]]$  à travers l'interface  $\Gamma$ , et s'apparentent à des relations de comportement surfacique :

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{\delta}), \quad \text{où} \quad \vec{\delta} = [[\mathbf{u}]]_{\Gamma} \quad (1 - 51)$$

De nombreuses lois d'interface ont été proposées dans la littérature : elles diffèrent selon la nature du matériau considéré (ductile, fragile, composite), du type de chargement envisagé (monotone croissant ou cyclique)... À titre d'exemple, nous présentons à la Figure 1 - 5 deux lois cohésives : en (a) une loi plastique parfaite proposée dans [Dugdale, 1960], et en (b) une loi dite « bilinéaire » adoucissante due aux travaux de Petersson [Petersson, 1981] fréquemment utilisée pour modéliser la rupture du béton.



Figure 1 - 5

Exemples de lois cohésives : (a) Dugdale [Dugdale, 1960] ; (b) Petersson [Petersson, 1981].

## 2.2 Formulation énergétique

### Energie potentielle de la structure

Les modèles de zone cohésive ont ensuite été étudiés dans un cadre variationnel, on peut citer par exemple les travaux suivants : [Cangémi, 1997 ; Charlotte *et al.*, 2006 ; Bourdin *et al.*, 2008]. Le processus de fissuration y est décrit comme un problème de recherche de minima locaux de l'énergie potentielle de la structure, s'exprimant comme la somme de l'énergie volumique de déformation élastique  $E_{el}$ , d'une énergie surfacique cohésive  $E_{co}$ , et du travail des efforts extérieurs :

$$E_{pot}(\mathbf{u}) = E_{el}(\mathbf{u}) + E_{co}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - W_{ext}(\mathbf{u}), \quad (1 - 52)$$

où  $E_{el}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega$ ,  $E_{co}(\boldsymbol{\delta}) = \int_{\Gamma} \Pi(\boldsymbol{\delta}) d\Gamma$ , et  $\boldsymbol{\delta} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\Gamma}$

où  $\Pi$  désigne la densité d'énergie (cohésive) surfacique à définir, dont la loi d'interface se déduit alors par dérivation. Notons qu'on a ici fait l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire dans  $\Omega$ , mais il n'est pas exclu de prendre en compte des mécanismes dissipatifs volumiques. Enfin, le trajet de fissuration  $\Gamma$  est ici supposé connu, nous reviendrons ultérieurement sur la question de sa détermination.

### Définition d'une densité d'énergie surfacique

Afin de décrire correctement le processus de fissuration, il convient de prendre en compte son caractère irréversible. Ceci peut être réalisé en introduisant dans  $\Pi$  une variable d'histoire  $\kappa$  qui mémorise la plus grande norme du saut atteinte au cours du chargement. Une fois problème discrétisé en temps, on définit  $\kappa$  par la relation incrémentale :

$$\kappa^{n+1} = \max(\kappa^n, \|\delta^{n+1}\|) \quad (1 - 53)$$

La densité d'énergie de surface peut alors s'écrire comme une fonction de la norme du saut et de la variable seuil :

$$\Pi(\delta, \kappa) = \hat{\Pi}(\|\delta\|, \kappa) \quad (1 - 54)$$

La condition de non interpénétration des lèvres de la fissure (contact) est ensuite prise en compte en introduisant une fonction indicatrice dans l'expression de  $\Pi$  afin de forcer la positivité de la composante normale du saut. En contrepartie,  $\Pi$  n'est plus différentiable dans le cas où  $\delta \cdot \mathbf{n} < 0$  :

$$\Pi(\delta, \kappa) = \hat{\Pi}(\|\delta\|, \kappa) + I_{\mathbb{R}^+}(\delta \cdot \mathbf{n}) \quad (1 - 55)$$

Afin de distinguer les cas dissipatifs (propagation de la fissure) des décharges, la densité d'énergie surfacique prend les expressions suivantes selon la valeur de la norme du saut :

$$\Pi(\delta, \kappa) = \begin{cases} \hat{\Pi}_{dis}(\|\delta\|, \kappa) + I_{\mathbb{R}^+}(\delta \cdot \mathbf{n}) & \text{si } \|\delta\| \geq \kappa \\ \hat{\Pi}_{lin}(\|\delta\|, \kappa) + I_{\mathbb{R}^+}(\delta \cdot \mathbf{n}) & \text{si } \|\delta\| < \kappa \end{cases} \quad (1 - 56)$$

Si on fait le choix d'une décharge élastique,  $\hat{\Pi}_{lin}$  doit être choisie comme une fonction quadratique de  $\|\delta\|$  (la loi d'interface s'obtenant par dérivation de  $\Pi$ ).

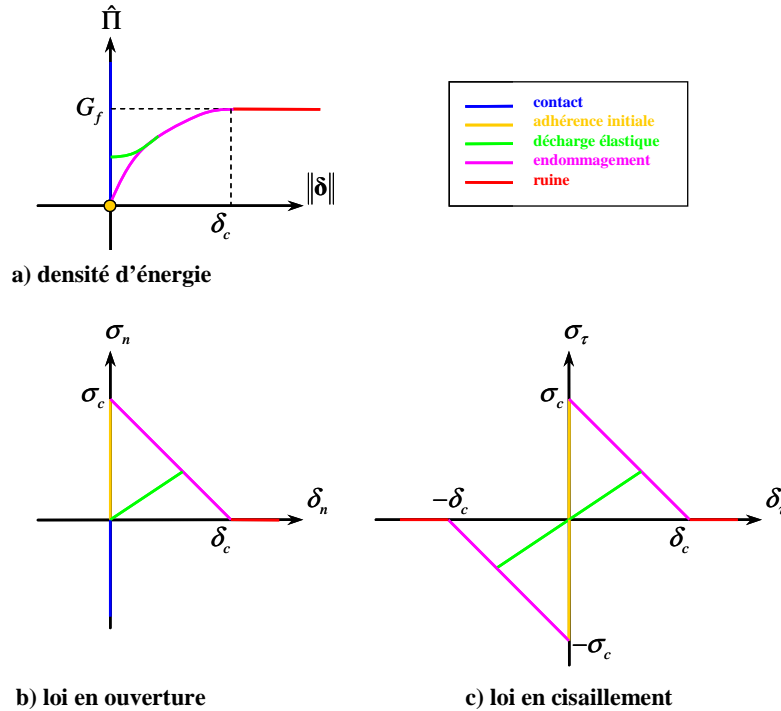


Figure 1 - 6

Exemple de loi cohésive extrinsèque à décharge élastique.

La forme de la loi cohésive est alors déterminée par l'expression de la densité d'énergie en régime dissipatif  $\hat{\Pi}_{dis}$ . En guise d'illustration, on présente à la Figure 1 - 6 (a) une densité d'énergie surfacique quadratique en régime dissipatif, ce qui correspond à une loi cohésive de type affine (Figure 1 - 6 (b) et (c)) en ouverture et en cisaillement où  $\delta_c$  désigne le saut de déplacement critique au-delà duquel le point de l'interface considéré est rompu. On peut également constater qu'outre la condition de non interpénétration,  $\hat{\Pi}$  n'est pas différentiable en  $\delta = 0$  du fait de la condition d'adhérence initiale caractérisée par une rigidité initiale infinie. La loi cohésive est alors qualifiée d'extrinsèque, par opposition aux lois intrinsèques qui présentent une rigidité initiale finie. Ici encore, le concept de dérivée doit être étendu aux fonctions non différentiables, la loi de comportement cohésive s'exprime alors par l'inclusion différentielle suivante, où  $\partial\Pi$  désigne le sous-différentiel de  $\Pi$  :

$$\bar{\sigma} \in \partial\Pi(\delta, \kappa) \quad (1 - 57)$$

---

## 2.3 Discrétisation spatiale

Plusieurs solutions basées sur la méthode des éléments finis permettent de discrétiser le problème global de minimisation de l'énergie potentielle (1 - 52). La première, et la plus fréquemment utilisée, consiste à mailler explicitement le trajet de fissuration en disposant des éléments dégénérés d'épaisseur nulle à l'interface des éléments finis volumiques après avoir préalablement doublé les nœuds du maillage, on parle alors « d'éléments d'interface » ou « d'éléments de joint ». D'autres méthodes permettent de s'affranchir du maillage de la discontinuité et reposent sur un enrichissement de la cinématique, soit à un niveau local (au niveau de l'élément fini), on parle alors d'éléments à discontinuité intégrée (embedded discontinuity finite elements, E-FEM), voir [Jirásek, 2000] et [Jirásek et Zimmermann, 2001a], soit à un niveau global avec la méthode des éléments finis étendus (extended finite elements method, XFEM) voir [Belytschko et Black, 1999] et [Moës *et al.*, 1999].

### 2.3.1 Élément fini d'interface

Ce type d'élément s'appuie en dimension deux sur une maille quadrangulaire dégénérée en segment (voir Figure 1 - 7), et en dimension trois sur une maille hexaédrique ou pentaédrique respectivement dégénérée en quadrangle ou en triangle.

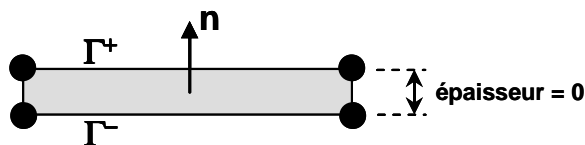


Figure 1 - 7

*Schéma de l'élément d'interface linéaire en dimension deux.*

Comme les éléments finis classiques, leurs nœuds portent des degrés de liberté de déplacement. Les interfaces de discontinuités potentielles  $\Gamma$  sont maillées avec de tels éléments, en conformité avec le maillage du massif  $\Omega \setminus \Gamma$  qui porte des éléments finis classiques.

D'un point de vue algorithmique, cet élément est traité exactement de la même manière qu'un élément fini classique. En effet, pour une formulation éléments finis impliquant des éléments classiques et des éléments d'interface, le champ de déplacement est discrétisé aux nœuds par des fonctions de formes de Lagrange usuelles, ce qui s'écrit avec les notations matricielles conventionnelles :

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega, \quad \mathbf{u}(x) &= \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{U} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{U} \\ \forall s \in \Gamma, \quad \boldsymbol{\delta}(s) &= \mathbf{M}(s) \cdot \mathbf{U} \end{aligned} \quad (1 - 58)$$

où  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{B}$  désignent respectivement la matrice des fonctions de forme et de leurs dérivées, et  $\mathbf{M}$  la matrice d'interpolation du saut à travers  $\Gamma$  construite à partir des fonctions de forme ;  $\mathbf{U}$  désigne quant à lui le vecteur des inconnues nodales. La relation d'équilibre discrétisée se déduisant du problème de minimisation de l'énergie potentielle (1 - 52) s'écrit alors :

$$\underbrace{F_{int}(\mathbf{U})}_{\int_{\Omega \setminus \Gamma} \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{M}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Gamma} = F_{ext} \quad \text{où} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \partial \Pi(\mathbf{M} \cdot \mathbf{U}, \kappa) \quad (1 - 59)$$

Aux points de Gauss des éléments d'interface, l'intégration de la loi cohésive remplace donc celle de la relation de comportement volumique (éventuellement non linéaire), et les contributions de ces éléments au vecteur des forces nodales intérieures  $F_{int}(\mathbf{U})$  sont quant à elles assemblées strictement de la même manière que celles des éléments classiques. Le système non linéaire (1 - 59) peut alors être résolu classiquement avec la méthode de Newton. L'élément d'interface s'adapte donc très bien à une formulation éléments finis standard en déplacement.

Cependant, du fait de la condition de contact et d'adhérence initiale, la loi cohésive est une fonction multivaluée du saut de déplacement, ce qui a pour conséquence de mettre en échec l'algorithme de Newton. Il est donc nécessaire de régulariser l'énergie surfacique afin de la rendre différentiable : ceci est réalisé en substituant à ces pentes infinies des parties élastiques caractérisées par une rigidité élevée (voir Figure 1 - 8). Afin de régulariser la partie relative à l'adhérence, la valeur initiale  $\kappa_0$  de la variable d'histoire n'est plus nulle mais strictement positive, ce qui conduit d'emblée à un comportement élastique dont la rigidité  $R_0$  vaut :

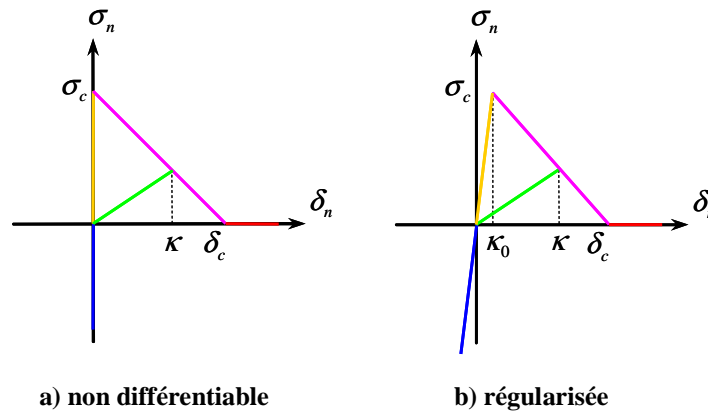
$$R_0 = \frac{\sigma_c}{\kappa_0} \quad (1 - 60)$$

De même, la condition de contact est traitée par pénalisation en remplaçant la fonction indicatrice par une fonction quadratique de la partie négative de la composante normale du saut, qui tend rapidement vers l'infini quand cette composante devient négative :

$$I_{\mathbb{R}^+}(\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}) \approx \frac{1}{2} C \langle -\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n} \rangle^2 \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{pen}(\boldsymbol{\delta}) = -C \langle -\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} \quad (1 - 61)$$

où  $\langle x \rangle$  désigne la partie positive de  $x$ ,  $\vec{\sigma}_{pen}$  le vecteur contrainte de pénalisation, et  $C$  le coefficient de pénalisation (choisi égal à la rigidité initiale  $R_0$  pour la Figure 1 - 8 (b)). Ceci interdit une interpénétration trop importante des lèvres de la fissure au cours de la minimisation. Le vecteur contrainte s'exprime alors comme la somme de la dérivée de la densité d'énergie surfacique et de la contrainte de pénalisation.

$$\vec{\sigma}(\delta, \kappa) = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \delta}(\delta, \kappa) + \vec{\sigma}_{pen}(\delta) \quad (1 - 62)$$



**Figure 1 - 8**

*Impact de la régularisation de l'énergie de surface sur la loi d'interface.*

Laverne [Laverne, 2004] montre que les résultats obtenus avec ce type de formulation éléments finis sont dépendants du paramètre de régularisation  $\kappa_0$  : s'il est choisi trop élevé la souplesse de la structure est alors trop importante et la réponse globale présente des petites instabilités (micro snap-backs), et s'il est choisi trop faible cela peut conduire à des problèmes de convergence si le maillage n'est pas suffisamment raffiné. Afin de s'affranchir de la régularisation de l'énergie de surface et d'éviter les problèmes qui en découlent, Lorentz [Lorentz, 2008] propose un élément d'interface s'appuyant sur une formulation mixte de type Lagrangien augmenté qui permet de préserver le caractère non différentiable de l'énergie de surface, et donc un traitement exact du contact et de l'adhérence initiale. Nous reviendrons par la suite sur cet élément fini (voir chapitre 2, § 3.1.2, ou voir annexe 2 pour une présentation détaillée).

Les résultats mentionnés ci-dessus ont été obtenus dans le cas où le trajet de fissuration est connu *a priori* : pour ce type de simulation le maillage est construit de telle sorte que la partie volumique du maillage soit conforme avec une discrétisation de la fissure réalisée via des éléments d'interface. En revanche, certains auteurs ont cherché à évaluer dans quelle mesure les éléments d'interface permettent de simuler la propagation de fissures lorsque leurs trajets ne sont pas connus : ceci suppose de placer des éléments de joint à l'interface de tous les éléments volumiques, comme cela est fait dans [Xu et Needleman, 1994] et [Zhou et Molinari, 2004] pour des applications en dynamique : une forte dépendance au maillage est soulignée par les auteurs si aucun traitement particulier n'est appliqué. Pour des évolutions quasi-statiques, Fraternali [Fraternali, 2007] souligne la nécessité de recourir à des modifications du maillage (déplacement des nœuds) pour espérer



converger vers une géométrie de fissure continue et éviter les géométries « en dents de scie », puisque cette dépendance à l'orientation des mailles conduit à la détermination d'une aire fissurée qui n'est pas celle de la fissure réelle, et donc à un calcul inexact de l'énergie dissipée par fissuration. Citons alors les travaux de Chiarutini et Feyel [Chiarutini et Feyel, 2011] où une méthode de remaillage adaptatif (voir [Chiarutini *et al.*, 2010]) est mise en œuvre afin de corriger le trajet de la fissure cohésive (discrétisée au moyen d'éléments d'interface) au cours de sa propagation lorsqu'un critère de branchement (de type contrainte d'ouverture maximale) est vérifié.

### 2.3.2 Éléments à discontinuité intégrée

Les éléments à discontinuité intégrée (E-FEM) s'appuient sur des mailles non dégénérées : la discontinuité potentielle  $\Gamma$  du champ de déplacement est alors prise en compte au sein de l'élément fini. Plus précisément, le saut de déplacement est discrétisé par des fonctions constantes par élément, il est alors considéré comme une inconnue locale et éliminé de la formulation globale par une technique de condensation statique : les inconnues globales restent alors les degrés de liberté de déplacement aux nœuds. L'intérêt de ce traitement local est qu'il permet de résoudre le problème global avec la méthode de Newton tout en préservant le caractère non différentiable de l'énergie de surface, autorisant ainsi l'implémentation de lois cohésives extrinsèques.

Jirásek [Jirásek, 2000] propose une classification détaillée de ces éléments selon que l'enrichissement local de la cinématique porte sur le déplacement ou la déformation, et selon le type d'interpolation choisi. Il distingue trois cas :

- Statically Optimal Symmetric (SOS) :

Dans cette formulation, c'est le champ de déformation qui est enrichi. La matrice d'interpolation du terme d'enrichissement est construite de telle sorte que l'équilibre soit vérifié au niveau de la discontinuité, mais la condition de compatibilité entre le déplacement et la déformation n'est plus vérifiée. Cette formulation conduit à une matrice tangente symétrique.

- Kinematically Optimal Symmetric (KOS) :

Le champ de déplacement est enrichi, et la déformation est compatible avec ce dernier. En revanche, l'équilibre n'est pas vérifié au niveau de la discontinuité. Cette formulation conduit également à une matrice tangente symétrique.

- Statically and Kinematically Optimal Nonsymmetric (SKON) :

Cette méthode consiste à enrichir le de déplacement comme dans KOS pour assurer la compatibilité entre le champ de déplacement et déformation, et à modifier comme dans SOS la matrice d'interpolation des déformations, mais uniquement pour les champs de déformation virtuels. Ceci permet de cumuler les avantages des deux méthodes précédentes, mais en contrepartie la matrice tangente obtenue n'est plus symétrique.

Notons enfin que contrairement à l'élément d'interface, l'intégration de la loi cohésive dépend de la relation de comportement volumique employée, ce qui rend leur implantation plus difficile dès lors que ce comportement n'est plus élastique linéaire.

### 2.3.3 Méthode des éléments finis étendus

#### XFEM en élasticité linéaire

Initialement développée dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (voir [Belytschko et Black, 1999] et [Moës *et al.*, 1999]), la méthode des éléments finis étendus (XFEM) est proposée comme une alternative à la méthode des éléments finis classique (FEM) pour l'étude de structures fissurées. L'avantage de cette méthode réside dans la prise en compte des discontinuités du champ de déplacement indépendamment du maillage utilisé, la géométrie de la fissure  $\Gamma$  étant alors caractérisée par deux fonctions de niveau (*level set*) : la première est définie comme la distance signée à la surface fissurée, et la seconde comme la distance signée (sur cette surface) au front de fissure. À partir de cette donnée géométrique, l'approximation du champ de déplacement est enrichie avec un terme supplémentaire :

$$\forall x \in \Omega, \quad \mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{U} + H_{\Gamma}(x) \mathbf{N}(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}} \quad (1 - 63)$$

où  $\mathbf{N}$  désigne la matrice des fonctions de forme classiques,  $\mathbf{U}$  le vecteur des inconnues nodales classiques,  $H_{\Gamma}$  la fonction de Heaviside centrée sur  $\Gamma$  (définie à partir de la distance signée à la fissure) et  $\tilde{\mathbf{U}}$  les degrés de liberté d'enrichissement relatifs au saut de déplacement portés uniquement par les nœuds dont le support est traversé par la fissure. Le saut de déplacement s'exprime alors :

$$\forall s \in \Gamma, \quad \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{\Gamma}(s) = \mathbf{N}(s) \cdot \tilde{\mathbf{U}} \quad (1 - 64)$$

Contrairement aux éléments à discontinuité intégrée, le saut de déplacement n'est plus considéré comme une inconnue locale puisqu'il intervient via les degrés de liberté  $\tilde{\mathbf{U}}$  au niveau de la résolution du problème global.

Afin de décrire la singularité du champ de contrainte en fond de fissure, un terme d'enrichissement supplémentaire est parfois ajouté dans (1 - 63) : il concerne les nœuds dont le support n'est que partiellement traversé par  $\Gamma$ , c'est-à-dire les nœuds des éléments contenant le fond de fissure. Les fonctions d'interpolation sont alors définies comme le produit des fonctions de forme usuelle et de la partie asymptotique de la solution de Westergaard en pointe de fissure.

#### XFEM et fissure cohésive

La méthode XFEM a ensuite été implémentée en affectant à la fissure un comportement de type cohésif, voir [Wells et Sluys, 2001], [Moës et Belytschko, 2002] et [Mariani et Perego, 2003]. Dans ce cas l'enrichissement du déplacement est uniquement de type Heaviside, le vecteur des forces nodales intérieures associé aux inconnues nodales  $\mathbf{U}$  reste inchangé, en revanche pour  $\tilde{\mathbf{U}}$  un terme supplémentaire doit être pris en compte du fait des forces de traction s'exerçant sur l'interface. Cette formulation reste donc relativement proche de celle de l'élément d'interface et nécessite *a priori* d'avoir recours à une régularisation de l'énergie de surface : en fait le traitement de la condition d'adhérence initiale peut être évité en faisant propager la fissure de manière incrémentale (comme cela est fait dans [Wells et Sluys, 2001] et [Mariani et Perego, 2003]), mais

en cas de refermeture la condition de contact est traitée par pénalisation dans [Mariani et Perego, 2003].

Les approches XFEM/CZM présentent donc l'avantage de ne pas avoir à mailler explicitement l'interface cohésive, ce qui ne résout pas pour autant la question de la détermination du trajet de fissuration. En effet, la fissure reste définie par les level set dont la propagation repose sur un critère extérieur à la formulation élément fini (post-traitement). Dans les articles mentionnés ci-dessus, un incrément de fissure se propage dès que la contrainte critique est dépassée en pointe de fissure, et la direction de propagation est choisie orthogonale à celle de la contrainte principale maximale.

## 3 Cohérence entre les modèles continus et discontinus

Cette partie a pour but d'évaluer la cohérence entre les modèles de fissuration continus et discontinus qui ont été présentés précédemment, au travers d'un cas simple, bidimensionnel, de propagation stable de fissure rectiligne en mode I. On s'intéresse notamment dans le cas du modèle cohésif, à l'influence que peut avoir la forme de la loi d'interface (à contrainte critique et énergie de rupture données) sur la réponse de la structure, le but étant de s'approcher autant que possible de la réponse du modèle non local. Ces résultats sont également replacés dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture, notamment en construisant des courbes de résistances (courbes-R) équivalentes.

---

### 3.1 Constructions de courbes-R équivalentes

Pour un modèle de fissuration non linéaire, la construction d'une courbe-R équivalente repose sur l'hypothèse que l'augmentation de la souplesse d'une structure à mesure que le chargement augmente peut être attribuée à la propagation d'une fissure dans un modèle de Griffith équivalent. Jirásek [Jirásek *et al.*, 2004] utilise ce concept pour déterminer l'énergie de rupture d'un modèle d'endommagement non local, et Morel *et al* [Morel *et al.*, 2010] afin de calibrer les paramètres d'une loi cohésive. Nous présentons ci-dessous les principales étapes de la construction d'une telle courbe, dans le cas d'une propagation rectiligne.

On réalise dans un premier temps un calcul de mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER), pour lequel on fait propager la fissure en « déboutonnant » progressivement les nœuds disposés le long du trajet rectiligne de fissuration, en partant de la pointe de la pré-fissure : la longueur d'un incrément de fissure est alors donnée par la distance séparant deux nœuds consécutifs. Pour chaque nouvel incrément, le chargement ( $U$  : déplacement imposé) est ajusté de telle sorte que le taux de restitution d'énergie élastique  $G$  soit exactement égal à l'énergie de rupture  $G_f$  (également définie comme un taux de restitution d'énergie élastique critique) caractérisant la loi cohésive : la fissure se propage donc à  $G = G_f$ . On réalise cette opération en utilisant une approche globale de type méthode G-thêta [Destuynder et Djaoua, 1981, Mialon, 1988] pour chaque nouvelle pointe de fissure. À chaque pas de propagation on stocke les grandeurs suivantes : déplacement imposé  $U$ , force résultante  $F$ , et longueur de fissure  $l$ . Il est alors nécessaire de construire en post-traitement du calcul deux courbes tabulées qui seront nécessaires par la suite. La première représente l'évolution de la souplesse structurale  $\mathcal{C}$  en fonction de l'avancée de fissure  $l$ , où  $\mathcal{C}$  est donnée par :

$$\mathcal{C} = \frac{U}{F} \quad (1 - 65)$$

La seconde représente la dérivée de la souplesse par rapport à l'avancée de fissure, et est obtenue par un schéma aux différences finies centrées (sauf pour la première et la dernière valeur), où  $\Delta l$  désigne le pas (constant dans notre cas) d'avancée de fissure :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{C}}{dl}(l_1) &= \frac{\mathcal{C}(l_1 + \Delta l) - \mathcal{C}(l_1)}{\Delta l} \\
\frac{d\mathcal{C}}{dl}(l_i) &= \frac{\mathcal{C}(l_i + \Delta l) - \mathcal{C}(l_i - \Delta l)}{2\Delta l} \text{ pour } 1 < i < n \\
\frac{d\mathcal{C}}{dl}(l_n) &= \frac{\mathcal{C}(l_n) - \mathcal{C}(l_n - \Delta l)}{\Delta l}
\end{aligned} \tag{1 - 66}$$

On effectue sur le même maillage un calcul non linéaire (dans notre cas avec un modèle de zone cohésive ou avec un modèle d'endommagement non local), et on stocke à chaque pas de chargement les grandeurs suivantes : déplacement imposé  $\tilde{U}$ , force résultante  $\tilde{F}$ , et souplesse  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Pour chaque valeur de  $\tilde{\mathcal{C}}$ , on détermine tout d'abord la longueur  $\tilde{l}$  de fissure MLER équivalente par interpolation linéaire sur la courbe  $l(\mathcal{C})$  construite à partir du calcul MLER :

$$\tilde{l} = \frac{l_{i+1} - l_i}{\mathcal{C}_{i+1} - \mathcal{C}_i} \tilde{\mathcal{C}} + \frac{\mathcal{C}_{i+1} l_i - \mathcal{C}_i l_{i+1}}{\mathcal{C}_{i+1} - \mathcal{C}_i}, \text{ avec } i \text{ tel que } \mathcal{C}_i \leq \tilde{\mathcal{C}} \leq \mathcal{C}_{i+1} \tag{1 - 67}$$

Puis, par interpolation linéaire sur la courbe (1 - 66), on peut déterminer la dérivée de la souplesse en  $\tilde{l}$  et ainsi évaluer la résistance  $G_R$  en  $\tilde{l}$  égale au taux de restitution d'énergie :

$$G_R(\tilde{l}) = G(\tilde{l}) = \frac{1}{2} \tilde{F}^2 \left. \frac{d\mathcal{C}}{dl} \right|_{l=\tilde{l}} \tag{1 - 68}$$

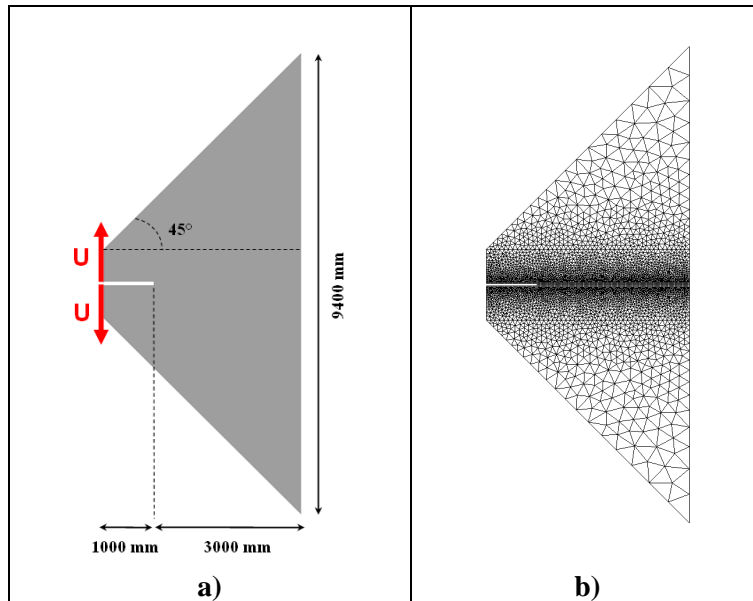
On peut ainsi construire point par point, pour la structure considérée, la courbe-R équivalente à la réponse obtenue avec un modèle de comportement non linéaire donné. De telles courbes sont tracées aux Figure 1 - 11 (b) et Figure 1 - 12 (b) pour un modèle cohésif et un modèle non local. Il semble important de souligner que le maillage utilisé doit être suffisamment raffiné pour fournir des pas d'avancée de fissure suffisamment petits, et donc fournir assez de points pour que l'erreur due aux étapes d'interpolation linéaire et de dérivation par différences finies reste acceptable.

## 3.2 Paramètres de l'étude

### 3.2.1 Maillages

On étudie ici le cas d'une éprouvette DCB trapézoïdale entaillée soumise à un chargement monotone croissant d'ouverture (à déplacement imposé) de part et d'autre de l'entaille, afin de solliciter la structure en mode I. La forme trapézoïdale choisie pour cette éprouvette permet de se placer dans le cas d'une propagation stable de fissure, et d'éviter de potentielles bifurcations de la fissure par rapport au trajet rectiligne initial. Notons que le choix d'une structure pré-fissurée est indispensable pour étudier la propagation de fissure avec le critère de Griffith en MLER, puisqu'il ne permettrait pas de modéliser l'initiation de la fissuration dans le cas où la structure serait

initialement saine (pas de singularité géométrique). La géométrie, la nature du chargement, et le maillage de cette éprouvette sont détaillés à la Figure 1 - 9.



**Figure 1 - 9**

*DCB trapézoïdale entaillée : (a) géométrie et chargement ; (b) : maillage 1.*

Afin d'étudier la convergence des solutions obtenues avec chacun des modèles, on considère trois maillages pour lesquels on fait décroître la taille caractéristique des mailles au niveau de la zone d'intérêt que constitue le ligament. Le maillage le plus grossier ou « maillage 1 » est représenté à la Figure 1 - 9 (b) : le prolongement de l'entaille est constitué d'un maillage structuré de quadrangles, dans une épaisseur correspondant à la largeur de la bande d'endommagement attendue pour la réponse non locale, tandis que le reste de l'éprouvette est maillé de manière libre avec un déraffinement progressif à mesure que l'on s'éloigne de la zone d'intérêt. Les deux autres maillages sont construits de la même manière, leurs caractéristiques sont données au Tableau 1 - 1.

	nombre de mailles dans la bande de localisation attendue	taille $h$ des quadrangles dans la zone d'intérêt
maillage 1	6	16,6 mm
maillage 2	10	10 mm
maillage 3	18	5,5 mm

**Tableau 1 - 1**

*Caractéristiques des trois maillages considérés.*

### 3.2.2 Modélisations

#### Modèle de Griffith :

La méthodologie de calcul employée pour ce type de modélisation a été précédemment exposée au § 3.1 portant sur la construction des courbes-R. Les valeurs des paramètres matériaux (élasticité et énergie de rupture), choisis pour représenter un matériau fragile de type béton sont

récapitulées au Tableau 1 - 2. Les résultats obtenus avec ce modèle seront nécessaires à la construction des courbes-R équivalentes pour les deux modèles non linéaires (cohésif et non local) étudiés par la suite.

Elasticité	$E = 3.10^4 \text{ MPa}, \nu = 0.2$
énergie de rupture	$G_f = 0.1 \text{ N/mm}$

Tableau 1 - 2

*Paramètres matériaux choisis pour le modèle MLER.*

### **Modèle cohésif :**

Le modèle cohésif utilisé repose sur l'élément fini d'interface décrit au chapitre 2, § 3.1.2 (voir annexe 2 pour plus de détails), qui permet de s'affranchir de la régularisation de l'énergie de surface, et donc d'assurer une adhérence initiale parfaite tant que la contrainte critique  $\sigma_c$  n'est pas atteinte. On dispose le long du ligament (là où les nœuds avaient été doublés pour le modèle MLER) des mailles d'épaisseur nulle qui porteront ces éléments finis cohésifs lors des simulations, et qui se verront affectés deux lois d'interface distinctes. Les paramètres matériaux les caractérisant (contrainte critique et énergie de rupture) gardent les mêmes valeurs d'une loi à l'autre, elles sont données au Tableau 1 - 3 (ainsi que celles des paramètres d'élasticité du massif).

élasticité du massif	$E = 3.10^4 \text{ MPa}, \nu = 0.2$
énergie de rupture	$G_f = 0.1 \text{ N/mm}$
contrainte critique	$\sigma_c = 3 \text{ MPa}$

Tableau 1 - 3

*Paramètres matériaux choisis pour le modèle cohésif.*

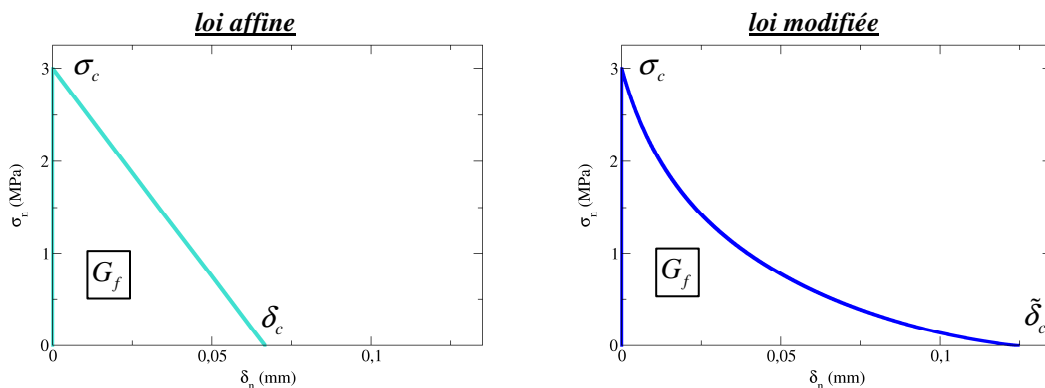


Figure 1 - 10

*Lois d'interfaces utilisées pour le modèle cohésif, avec  $\sigma_c = 3 \text{ MPa}$  et  $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ .*

En revanche, la forme de la loi est modifiée (voir Figure 1 - 10) : la première est affine en régime dissipatif, alors que la seconde a une forme qui se rapprocherait plus d'une loi exponentielle, avec un saut de déplacement à rupture  $\tilde{\delta}_c$  restant cependant fini. Cette loi dite « modifiée » a en fait été identifiée sur la base d'une étude analytique (voir chapitre 2, § 2.5.1) pour être parfaitement équivalente au modèle d'endommagement à gradient dans un cadre unidimensionnel. On souhaite

donc voir dans quelle mesure cette propriété reste conservée dans le cadre bidimensionnel éléments finis, et également comparer, tous paramètres égaux par ailleurs, les résultats obtenus avec une loi simple comme la loi dite « affine ».

### **Modèle non local :**

Enfin, le modèle d'endommagement volumique utilisé repose sur la formulation à gradient d'endommagement décrite dans ce chapitre au § 1.5.3 (voir annexe 1 pour la description de l'élément fini mixte correspondant), et nécessite la donnée d'un paramètre matériau supplémentaire, relié à la longueur caractéristique, et qui peut être choisi comme la largeur de la bande de localisation à rupture  $2D$  (voir étude analytique du chapitre 2, § 2.2) et dont la valeur est donnée au Tableau 1 - 4.

élasticité	$E = 3.10^4 \text{ MPa}, \nu = 0.2$
énergie de rupture	$G_f = 0.1 \text{ N/mm}$
contrainte critique	$\sigma_c = 3 \text{ MPa}$
largeur de la bande de localisation à rupture	$2D = 100 \text{ mm}$

**Tableau 1 - 4**

*Paramètres matériaux choisis pour le modèle à gradient d'endommagement.*

### **Remarque :**

*Comme les modèles considérés peuvent être classés selon leur nature continue ou discontinue, ou selon leur caractère linéaire ou non linéaire, on rappelle dans le tableau ci-dessous ces caractéristiques.*

	continu	discontinu
linéaire		<i>modèle de Griffith</i>
non linéaire	<i>modèle non local</i>	<i>modèle cohésif</i>

**Tableau 1 - 5**

*Caractéristiques des modélisations considérées.*

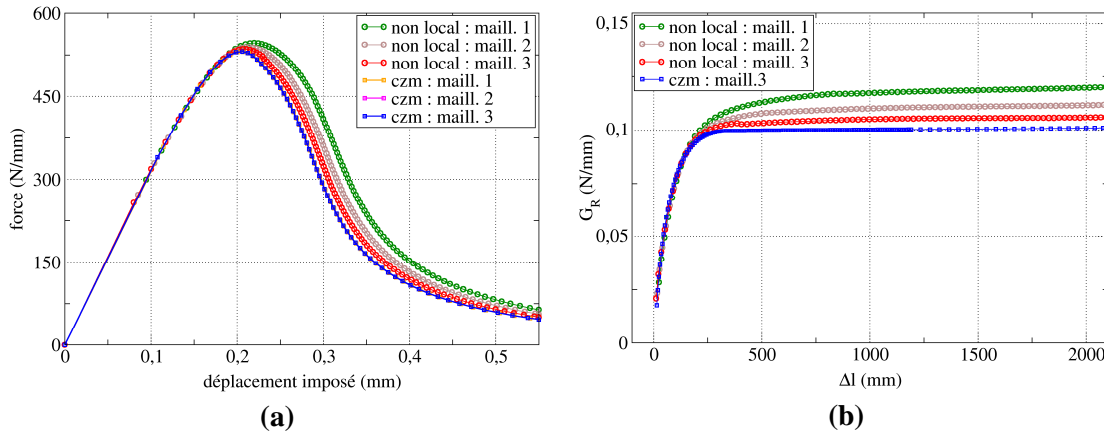
## **3.3 Etude comparative des différents modèles**

### **3.3.1 Convergence des solutions avec le raffinement du maillage**

On souhaite dans un premier temps évaluer la taille de maille minimale requise pour assurer une précision suffisante, afin de pouvoir ensuite comparer ces trois approches. Sur la Figure 1 - 11 sont superposées les réponses obtenues avec le modèle non local et le modèle cohésif (loi modifiée) pour les trois maillages (voir Tableau 1 - 1). La courbe force – déplacement (figure (a)) montre que la réponse cohésive a déjà convergé sur le maillage le plus grossier, alors que le modèle non local nécessite un niveau de raffinement beaucoup plus élevé : sur le maillage le plus fin (18 éléments dans la bande de localisation) la solution semble se stabiliser (au-delà l'écart n'est presque plus perceptible), mais ne se superpose pas exactement sur celle du modèle cohésif. Afin d'évaluer cet



écart, on peut également comparer l'évolution de la résistance  $G_R$  en fonction de l'avancée de fissure MLER équivalente illustrée sur la courbe-R tracée à la figure (b), pour laquelle on ne représente la réponse du modèle cohésif que pour un seul maillage, la convergence vis-à-vis de la taille de maille étant déjà atteinte pour le maillage le plus grossier. Pour le modèle cohésif, on observe une première phase au cours de laquelle  $G_R$  croît jusqu'à atteindre une valeur plateau  $G_{Rc}$  : cette phase correspond à l'amorçage de la fissure cohésive. La seconde phase constitue un plateau en résistance dont la valeur est exactement égale à celle de l'énergie de rupture de la loi d'interface, soit  $G_{Rc} = G_f$ , cette phase correspond à un régime de propagation dit « stationnaire » de la fissure cohésive, et est caractérisée par une invariance (au cours de la propagation) du champ de déplacement (ou de contrainte) au voisinage de la pointe de fissure dans un repère mobile se déplaçant avec la pointe de fissure.



**Figure 1 - 11**

*Convergence des réponses non locale et cohésive (loi modifiée) : (a) évaluée en termes de courbe force – déplacement, (b) évaluée en termes de courbe-R équivalente.*

Pour le modèle non local, le même type d'évolution est observé : au début de la phase d'amorçage les courbes correspondant aux trois maillages sont confondues avec la réponse cohésive, mais une fois le régime de propagation atteint, un écart s'installe : le plateau  $G_{Rc}$  est atteint d'autant plus tardivement et avec un écart d'autant plus important avec le modèle cohésif que le maillage considéré est grossier (20% d'écart sur  $G_{Rc}$  avec le maillage 1 contre 5% avec le maillage 3). Nous conserverons donc par la suite le maillage le plus raffiné (maillage 3 : 18 mailles dans l'épaisseur de la bande de localisation) pour comparer les différentes approches.

### 3.3.2 Comparaison des réponses globales

Il s'agit dans ce paragraphe d'évaluer l'influence de la forme donnée à la loi cohésive (à  $\sigma_c$  et  $G_f$  donnés) sur sa capacité à reproduire la réponse globale du modèle non local, et également de comparer les résultats de ces modèles non linéaires avec le modèle de Griffith (MLER). On peut observer dans un premier temps (Figure 1 - 12 (a) et (b)) que les trois modèles discontinus (cohésif pour les lois affine et modifiée, et le modèle de Griffith) conduisent à des réponses qui se superposent exactement dès lors que la phase de propagation stationnaire est atteinte, l'écart observé avec le modèle non local reste donc celui qui a été mentionné dans le paragraphe précédent.

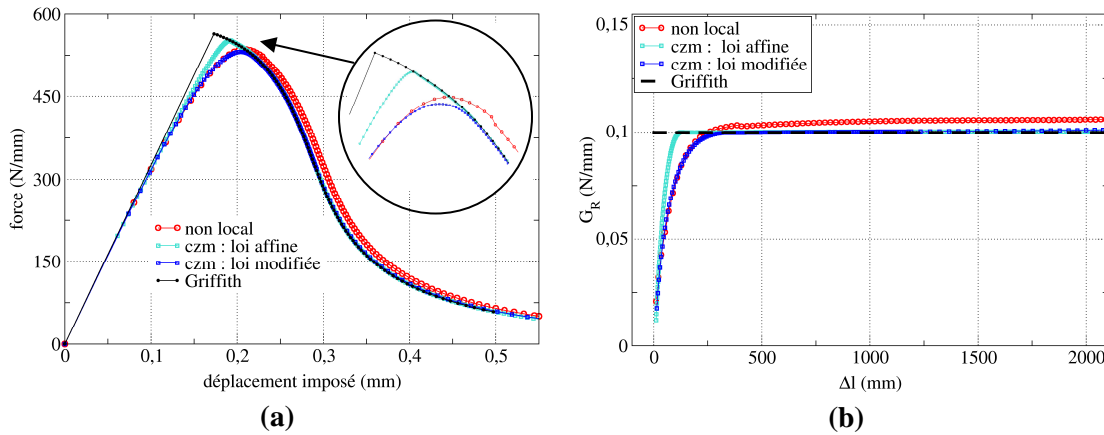


Figure 1 - 12

Comparaison (sur le maillage 3) des modèles MLER, cohésifs (lois affine et modifiée), et non local :  
(a) en termes de réponse force – déplacement ; (b) en termes de courbe-R équivalente.

En revanche, c'est dans la phase d'amorçage des modèles non linéaires que l'on observe l'influence de la forme de la loi cohésive. En effet, sur la courbe-R Figure 1 - 12 (b) le plateau en résistance  $G_R = G_{Rc}$  est atteint beaucoup plus rapidement avec la loi affine qu'avec la loi modifiée (respectivement pour une extension de fissure équivalente  $\Delta l$  d'environ 125 mm contre 250 mm) pour le jeu de paramètres matériaux choisi, ce qui se traduit sur la réponse force – déplacement (Figure 1 - 12 (a)) par un pic de force plus élevé (environ 6% d'écart) et apparaissant plus tôt avec la loi affine. La loi modifiée reproduit quant à elle fidèlement la phase d'amorçage du modèle non local, et l'écart relatif de 5% constaté sur  $G_{Rc}$  n'est plus imputable au degré de raffinement du maillage puisque la convergence vis-à-vis de la taille de maille est déjà atteinte sur le maillage considéré. Cet écart est dû au caractère propagatif de ce cas test 2D, car comme nous le verrons au chapitre suivant, la loi modifiée est construite pour reproduire exactement le comportement du modèle non local dans un milieu unidimensionnel, ce qui dans notre cas revient à ne considérer le gradient de la variable d'endommagement que dans la direction normale au trajet de fissuration, et pas dans la direction tangentielle.

### 3.3.3 Comparaison des tailles de process zones

Pour un modèle cohésif, la *process-zone* est définie comme la portion de l'interface sur laquelle le saut de déplacement maximal atteint jusqu'à présent est strictement compris entre 0 et sa valeur critique  $\delta_c$ . (ce qui revient à définir un endommagement surfacique strictement compris entre 0 et 1). De la même manière, la longueur de la *process zone* non locale peut être définie comme celle de la portion de droite passant au centre de la bande de localisation (où l'endommagement est maximal), et sur laquelle l'endommagement est strictement compris entre 0 et 1. On pourra se reporter à la Figure 1 - 13 afin de visualiser cette zone sur la structure étudiée, pour chacun des deux modèles non linéaires. La taille de cette *process zone* pouvant être amenée à varier à mesure que la fissure se propage dans la structure (et donc à mesure que la structure s'assouplit), nous étudions dans cette partie son évolution en fonction de la souplesse la structure.

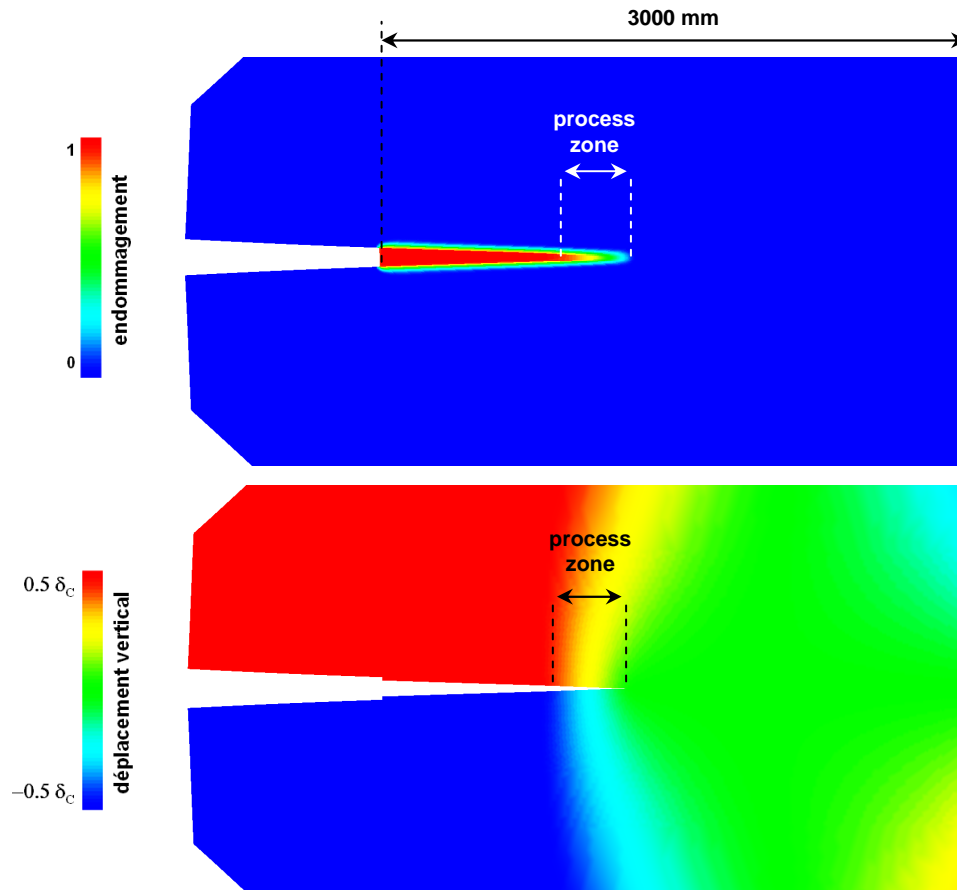
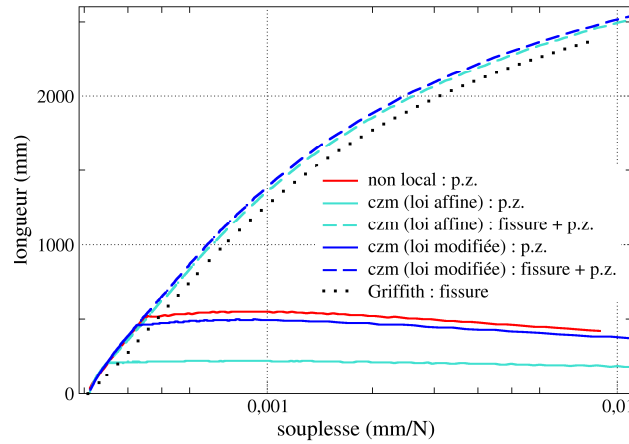


Figure 1 - 13

Localisation des process zones, sur la figure du haut pour le modèle non local, sur la figure du bas pour le modèle cohésif muni de la loi modifiée (dans la configuration déformée x300).

On trace à la Figure 1 - 14 l'évolution de ces *process zones* en fonction de la complaisance pour les modèles non linéaires (en traits pleins), ainsi que l'évolution de la longueur totale de fissure (en pointillés) pour les modèles discontinus (pour le modèle cohésif, on entend par longueur totale de fissure celle de la discontinuité comprenant la *process zone* et la partie de l'interface ne transmettant plus aucun effort). Notons que le choix de la souplesse comme grandeur de référence en abscisse permet de déterminer la position de la pointe de fissure MLER équivalente pour les deux modèles non linéaires.

L'évolution de la taille des *process zones* se fait en trois étapes. Au cours de la première, la *process zone* s'étale jusqu'à atteindre une longueur critique au moment où au moins un point matériel voit un endommagement total (surficiel pour le modèle cohésif, et volumique pour le modèle non local), alors que pendant la seconde, la propagation se fait à taille de *process zone* constante. La troisième étape est caractérisée par une légère décroissance de la longueur de la *process zone* lorsque la pointe de fissure se rapproche de la frontière du domaine, ce qui ne serait pas observé dans le cas d'un milieu semi-infini. Il est montré dans [Morel *et al.*, 2010] que dans le cadre de la rupture quasi-fragile, et pour un modèle de zone cohésive, les deux premières étapes correspondent aux phases d'amorçage et de propagation stationnaire observées sur les courbes-R et décrites au paragraphe précédent, ce que nous observons également pour le modèle d'endommagement non local.



**Figure 1 - 14**

*Evolution de la longueur des process zones (p.z., traits pleins), et de la longueur totale des fissures (pointillés) en fonction de la souplesse de la structure (échelle log. en abscisse).*

On constate que la taille critique atteinte par la *process zone* cohésive dépend clairement de la forme donnée à la loi d'interface : pour la loi modifiée on observe une *process zone* d'environ 500 mm, alors qu'elle est approximativement divisée par deux pour la loi affine (environ 240 mm), ce qui, en termes d'ordre de grandeur, reste en accord avec l'expression (1 - 69) donnée dans [Rice, 1980],  $L_{CZM}$  désignant cette taille critique. On reste bien dans une gamme de tailles de *process zone* non négligeables devant les dimensions de la structure (entre environ 1/6 et 1/10 de la longueur du ligament), ce qui est caractéristique des matériaux quasi-fragiles comme le béton.

$$L_{CZM} \approx \frac{EG_f}{\sigma_y^2(1-\nu^2)} \xrightarrow{\text{A.N.}} L_{CZM} \approx 345 \text{ mm} \quad (1 - 69)$$

La détection de la *process zone* en post-traitement d'un calcul élément fini est aisée pour un modèle cohésif dans la mesure où l'endommagement surfacique est concentré dans une couche d'éléments d'interface (d'épaisseur nulle) bien identifiée. En revanche, pour le modèle d'endommagement volumique (non local), la variable d'endommagement est définie aux points d'intégration dont la localisation géométrique dépend directement du maillage utilisé : il faudrait idéalement s'arranger pour disposer d'une rangée de points de Gauss située sur la ligne médiane de la bande de localisation (ou de nœuds, si l'on souhaite recourir à une extrapolation nodale de cette variable interne). Dans notre cas, nous avons identifié à chaque pas de chargement les points de Gauss situés dans la rangée la plus proche du centre de la bande (cette partie de la structure étant ici maillée avec une grille cartésienne) pour lesquels l'endommagement  $a_y$  est tel que  $0 < a < 0.98$  (la valeur  $a = 1$  n'étant pas atteinte aux points d'intégration avec le maillage utilisé). Ce choix arbitraire conduit sûrement à surestimer (ou à sous-estimer) cette taille, comme le montre la Figure 1 - 15 où l'on a choisi d'autres valeurs pour la borne supérieure de l'inégalité (0.97 et 0.99). S'il reste donc délicat d'identifier précisément la taille de la *process zone* non locale, il n'en reste pas moins que le modèle cohésif muni de la loi modifiée permet de reproduire exactement les tendances en termes d'évolution (croissance, plateau, puis décroissance) obtenues avec le modèle non local, et ce sur les mêmes intervalles de souplesse.

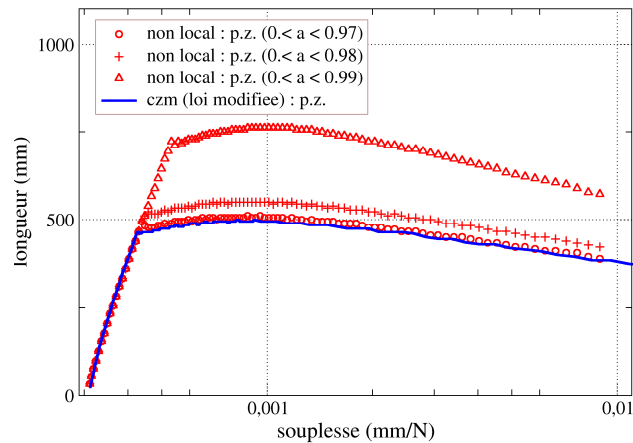


Figure 1 - 15

*Influence du choix du critère d'appartenance à la process zone non locale.*

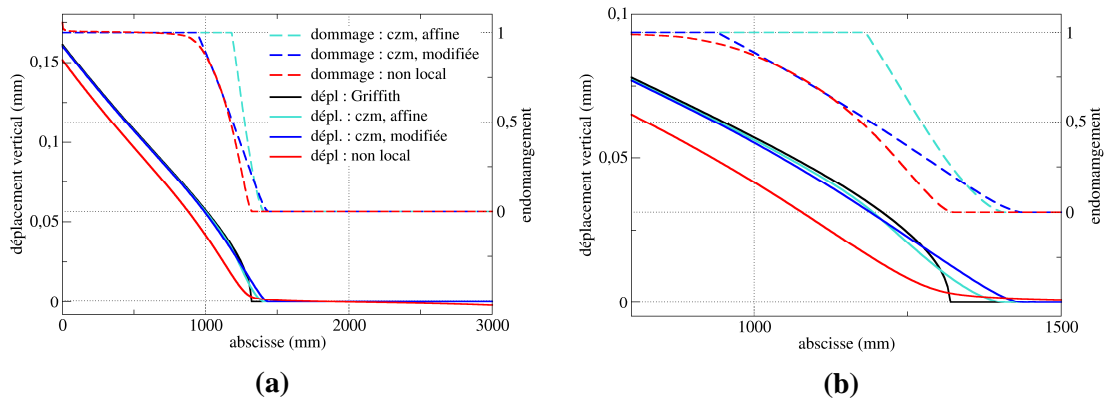
Enfin, en ce qui concerne l'évolution des longueurs totales de fissure à la Figure 1 - 14, les courbes obtenues avec les deux lois cohésives se superposent lorsque les longueurs critiques de *process zone* ont été atteintes, et l'écart constaté avec la longueur de fissure de Griffith équivalente reste constant dans cette phase de propagation stationnaire, ce qui avait déjà été souligné dans [Morel *et al.*, 2010].

### 3.3.4 Comparaison locale des champs au voisinage de la fissure

On a établi au cours des deux paragraphes précédents des comparaisons s'appuyant sur des considérations énergétiques d'ordre global, c'est-à-dire à l'échelle de la structure. Afin de clore cette étude, on s'intéresse désormais à la manière dont les modèles mis en œuvre décrivent localement les champs mécaniques au voisinage de la fissure, et notamment à leur capacité à répondre de manière cohérente à la question suivante : « *sous un niveau de chargement donné, où se situe la pointe de fissure et quelle est l'ouverture de fissure ?* ». On a constaté sur la courbe force – déplacement Figure 1 - 12 (a) un écart entre la réponse du modèle non local et celles des modèles discontinus (pour lesquels les réponses sont toutes superposées) qui se traduit par une force résultante plus élevée à niveau de chargement donné (déplacement imposé) pour le modèle non local, conduisant ainsi à une structure moins souple. En pratique, c'est bien la valeur du chargement (et non celle de la souplesse) que contrôle l'utilisateur du code de calcul, c'est donc pour un même niveau de chargement que nous allons comparer les déplacements d'ouverture obtenus avec chaque modèle.

On se place donc à une valeur de chargement  $U = 0.3$  mm, pour laquelle la taille critique de *process zone* a déjà été atteinte par tous les modèles non linéaires. Pour les modèles discontinus, on relève sur toute la longueur du ligament la composante verticale du champ de déplacement au niveau des nœuds de la lèvres supérieure de la fissure, ce qui correspond à la demi-ouverture de fissure ; pour le modèle cohésif, on relève de plus le champ d'endommagement surfacique aux points d'intégration des éléments d'interface. La nature continue du modèle non local ainsi que la symétrie du problème imposent que le déplacement d'ouverture reste nul au centre de la bande de localisation, on choisit donc d'approcher le (demi) déplacement d'ouverture par la composante verticale du champ de déplacement sur les nœuds situés au bord de la bande de localisation. On relève également la valeur de l'endommagement extrapolé aux nœuds situés au centre de la bande de localisation. Ces champs sont tracés à la Figure 1 - 16 en fonction de la position le long du

ligament, sur des graphiques à double ordonnées (déplacement / endommagement) afin de visualiser distinctement la partie saine, la *process zone*, et la partie totalement rompue.



**Figure 1 - 16**

*Pour un déplacement imposé de 0.3 mm, et pour chaque modèle considéré : composante verticale du déplacement le long de la lèvres supérieure de la fissure (traits pleins) et de l'endommagement (pointillés) en fonction de l'abscisse le long du ligament. (a) : sur toute la longueur du ligament ; (b) zoom au niveau des process zones.*

La figure (a), représentant ces champs sur toute la longueur utile, montre qu'à l'échelle de la structure les ouvertures obtenues avec les modèles discontinus sont quasi-identiques, de légers écarts étant constatés au voisinage des points où ce déplacement s'annule, c'est-à-dire au niveau des pointes de fissure. Pour le modèle non local, on constate un écart avec les modèles discontinus, constant dans la partie totalement endommagée et d'environ 7% relativement à la valeur obtenue avec ces modèles. Dans une première approximation, un tel écart reste acceptable d'autant plus que le choix de relever le déplacement au bord de la bande de localisation reste discutable. Les mêmes champs sont également tracés à la figure (b), en se concentrant uniquement sur la *process zone*.

# Chapitre 2

## Passage d'un modèle continu régularisé à un modèle cohésif

---

1	Approches continues - discontinues dans la littérature .....	57
1.1	Construction de modèles discontinus équivalents.....	58
1.2	Approches couplées continues - discontinues .....	60
1.2.1	Transition à endommagement ultime .....	60
1.2.2	Transition avant rupture : transfert local d'énergie .....	62
1.3	Bilan .....	64
2	Etude semi-analytique unidimensionnelle.....	66
2.1	Description du problème continu .....	66
2.2	Solution pour la formulation à gradient de variable interne.....	68
2.3	Solution pour la formulation à gradient implicite .....	71
2.3.1	Mise en équations.....	71
2.3.2	Résolution dans la partie linéaire .....	72
2.3.3	Résolution dans la partie non linéaire .....	73
2.3.4	Bilan .....	75
2.3.5	Intégration numérique .....	76
2.3.6	Choix du facteur de rigidité.....	78
2.3.7	Influence des paramètres du facteur rigidité .....	79
2.3.8	Récapitulatif de la méthode de résolution .....	82
2.4	Choix de la formulation non locale .....	83
2.5	Passage du modèle continu au modèle discontinu .....	86
2.5.1	Identification d'une loi d'interface équivalente .....	86
2.5.2	Passage du modèle non local au modèle cohésif.....	88
2.5.3	Récapitulatif de la méthode d'identification de lois cohésives de transition.....	92
3	Extension au cadre éléments finis en dimension deux et trois .....	94
3.1	Discretisation spatiale .....	94
3.1.1	Élément fini mixte non local à gradient d'endommagement.....	94
3.1.2	Élément fini mixte d'interface pour les modèles de zones cohésives .....	95
3.2	Algorithme de couplage explicite.....	97
3.2.1	Hypothèses .....	97
3.2.2	Algorithme .....	99
3.2.3	Pilotage du chargement .....	102

---

Ce chapitre présente tout d'abord une revue bibliographique des approches impliquant à la fois des modèles continus d'endommagement et des modèles discontinus de fissuration pour des simulations de propagation de fissures par éléments finis.

Ensuite, nous étudions dans un contexte unidimensionnel la transition entre un modèle d'endommagement continu régularisé et un modèle cohésif. Plus précisément, on établit dans un premier temps une comparaison entre deux techniques de régularisation (formulation à gradient d'endommagement et formulation à gradient implicite portant sur la déformation) sur la base d'une étude semi analytique, afin de sélectionner celle qui nous paraît la plus adaptée pour mener à bien notre étude. Disposant de la solution du problème continu, on montre qu'il est alors possible d'identifier analytiquement une famille de lois d'interface permettant de basculer du modèle continu non local vers un modèle cohésif quelque soit le niveau de dégradation atteint par le matériau, et ce tout en assurant l'équivalence énergétique entre les deux modèles.

Enfin, on propose une extension de cette stratégie au cadre 2D (et 3D) éléments finis dans le cas de la propagation de fissures rectilignes (et planes) en mode I.



# 1 Approches continues - discontinues dans la littérature

Cette partie bibliographique a pour but de rappeler les différents travaux dans lesquels l'amorçage et la propagation de fissures sont simulés en faisant intervenir à la fois des modèles d'endommagement volumiques et des modèles discontinus de fissuration. Ce passage d'un modèle continu à un modèle discontinu est activement étudié depuis les quinze dernières années et a fait l'objet de nombreuses publications. Loin de vouloir être exhaustif, on se propose ici de revenir sur les contributions qui paraissent les plus pertinentes dans le cadre de notre étude.

Dans ces travaux, le modèle d'endommagement est mis en œuvre afin de décrire l'initiation de la fissuration ainsi que les mécanismes de dégradation qui ont lieu en amont de la pointe de fissure (au niveau de la *process zone*). De plus, la capacité à détecter le trajet de fissuration étant inhérente à ce type de modèle, il sert donc également à identifier le lieu où les surfaces de discontinuité du champ de déplacement doivent être insérées. Aussi, si le modèle continu doit être en mesure de répondre avec fiabilité à ce cahier des charges, on a vu au chapitre 1, § 1.4, qu'il était indispensable de le régulariser pour s'affranchir des problèmes de dépendance au maillage (localisation et orientation). Le recours à un modèle d'endommagement régularisé nous paraît donc indispensable pour décrire la partie continue du problème, d'autant plus que le cadre de notre étude se borne à l'endommagement quasi-fragile pour lequel l'utilisation d'un modèle local conduirait immédiatement au régime de localisation (pas de phase d'endommagement diffus)

On distinguera par la suite deux grandes catégories d'approches parmi les travaux disponibles dans la littérature.

- La première consiste à construire, en post-traitement d'un calcul d'endommagement non local, un modèle discontinu équivalent (de type Griffith ou cohésif) en s'appuyant soit sur des équivalences énergétiques, soit sur le concept de discontinuité forte (« *strong discontinuity approach* » dont le formalisme a été développé dans [Simo *et al.*, 1993] et [Oliver, 1996]).
- La seconde catégorie concerne l'utilisation conjointe du modèle continu et du modèle discontinu dans un même calcul éléments finis, que l'on qualifiera « d'approches couplées ». Dans ce cas le changement de modèle se fait graduellement au niveau des zones endommagées, ce qui soulève plusieurs questions : *quelle modélisation des discontinuités employer, où faut-il les placer, et quand faut-il les insérer ?* Le recours à des méthodes de discrétisation comme X-FEM ou à des méthodes de remaillage, ainsi que le choix d'un critère de propagation fournissent, dans les publications traitant ce problème, des réponses aux deux premières questions. En revanche, la réponse à la question *quand* conduit à distinguer deux sous-catégories d'approches couplées, qui se résument soit à l'insertion de fissure (libre de tout effort surfacique) au niveau des points matériels qui voient un endommagement total, soit à l'insertion de fissure avant que l'endommagement n'ait atteint sa valeur ultime. Dans ce dernier cas, le modèle discontinu doit nécessairement être de type cohésif puisqu'il doit permettre de dissiper l'énergie qui aurait été localement dissipée par le modèle d'endommagement volumique jusqu'à rupture.

## 1.1 Construction de modèles discontinus équivalents

Dans [Dufour *et al.*, 2008], une méthode est développée afin d'estimer l'ouverture de fissure équivalente à la localisation d'un endommagement volumique régularisé. Elle est construite sur le cas unidimensionnel d'une barre soumise à un chargement de traction monotone croissant : la barre est encastree en  $x = 0$ , un déplacement est imposé en  $x = L$ , et la fissure ponctuelle est localisée en  $x = x_0$ . Lorsque le barreau est complètement rompu, le champ de déplacement présente une discontinuité en  $x = x_0$ . En s'appuyant sur le formalisme de la discontinuité forte, il peut s'écrire de la manière suivante (l'indice *sd* signifiant *strong discontinuity*), et le champ de déformation est alors obtenu par dérivation :

$$u_{sd}(x) = \llbracket u \rrbracket H(x - x_0) \Rightarrow \varepsilon_{sd}(x) = \llbracket u \rrbracket \mathcal{D}(x - x_0) \quad (2 - 1)$$

avec  $\llbracket u \rrbracket$  le saut de déplacement en  $x = x_0$ , et  $H$  et  $\mathcal{D}$  respectivement la fonction de Heaviside et la distribution de Dirac. Si  $\varepsilon$  désigne la déformation locale sous un niveau de chargement quelconque, on rappelle l'expression de la déformation régularisée  $\bar{\varepsilon}$  correspondante pour un modèle non local de type intégral, où  $\omega$  désigne la fonction poids caractérisant l'opérateur de délocalisation :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{V(x)} \int_{\Omega} \omega(x - y) \varepsilon(y) dy, \text{ où } V(x) = \int_{\Omega} \omega(x - y) dy \quad (2 - 2)$$

L'application de cet opérateur au champ local  $\varepsilon_{sd}$  conduit à l'expression ci-dessous pour son pendant non local  $\bar{\varepsilon}_{sd}$ . Ces deux champs sont représentés à la Figure 2 - 1.

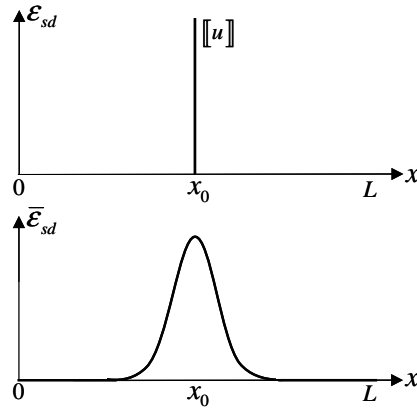
$$\bar{\varepsilon}_{sd}(x) = \llbracket u \rrbracket \frac{\omega(x - x_0)}{V(x)} \quad (2 - 3)$$

La méthode s'appuie alors sur le raisonnement suivant : si le modèle continu permet de décrire avec précision le stade ultime de la rupture, l'erreur entre  $\bar{\varepsilon}$  et  $\bar{\varepsilon}_{sd}$  devrait tendre vers 0 lorsque l'endommagement tend vers 1 en  $x = x_0$ , et on devrait idéalement avoir l'égalité  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{sd}$  à rupture. Dans ce cas, on a d'après (2 - 3) l'expression du saut de déplacement connaissant le champ de déformation régularisé obtenu avec le modèle non local :

$$\llbracket u \rrbracket = \frac{V(x_0)}{\omega(0)} \bar{\varepsilon}(x_0) \quad (2 - 4)$$

En pratique l'expression (2 - 4) fournit un outil de post-traitement qui, à partir du résultat d'un calcul d'endommagement non local, permet d'estimer une ouverture de fissure équivalente. L'erreur observable entre  $\bar{\varepsilon}$  et  $\bar{\varepsilon}_{sd}$  procure de plus un indicateur permettant de quantifier la qualité de cette estimation. Enfin, cette approche est développée sur un exemple unidimensionnel mais peut être étendue aux dimensions supérieures pour des propagations de fissures en mode I, ce qui suppose de

détecter le lieu où l'endommagement est maximal (ligne en 2D, surface en 3D) et d'y réaliser en tout point la même opération. Ce type d'approche a été développée en dimension deux par Bottoni et Dufour [Bottoni et Dufour, 2010].



**Figure 2 - 1**

*Déformation locale à discontinuité forte  $\varepsilon_{sd}$ , et déformation régularisée  $\bar{\varepsilon}_{sd}$  associée.*

Dans [Planas *et al.*, 1993], le même type de méthode est employé pour construire une loi cohésive équivalente à un modèle non local. Il faut alors ajouter dans l'expression de la déformation (2 - 1) un terme constant dépendant du chargement et qui correspond à l'état de déformation homogène dans  $[0, L] \setminus x_0$ . La construction de la loi cohésive revient donc à trouver, à chaque pas de chargement, le saut  $[[u]]$  qui assure l'égalité  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{sd}$ .

Dans [Mazars et Pijaudier-Cabot, 1996], des équivalences énergétiques entre un modèle de Griffith et un modèle d'endommagement non local intégral sont construites en s'appuyant sur le concept de fissure équivalente, pour lequel est imposée l'égalité entre l'énergie de surface nécessaire à la création d'une aire fissurée, et l'énergie volumique dissipée avec le modèle non local pour former la zone endommagée considérée. Au cours de l'évolution, cette égalité doit également être vérifiée par les incréments d'énergie dissipée, ce qui traduit par la relation suivante :

$$G_c d\mathcal{A} = \int_{\Omega} Y da d\Omega \quad (2 - 5)$$

où  $G_c$  désigne le taux de restitution d'énergie élastique critique,  $d\mathcal{A}$  l'incrément d'aire fissurée,  $Y$  la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement  $a$ , et  $da$  l'incrément de champ d'endommagement. La relation (2 - 5) peut alors être intégrée sur toute la durée de l'évolution afin d'obtenir l'aire de la fissure équivalente sous un niveau de chargement donné. À l'inverse, une méthode est développée pour construire analytiquement la distribution spatiale d'endommagement équivalente à une fissure rectiligne donnée dans un milieu infini au sein duquel la fissure s'est propagée sous un chargement en mode I. Cette construction s'appuie sur l'hypothèse que l'influence de la *process zone* (définie comme la portion de la zone endommagée où l'endommagement maximal vérifie  $0 < a < 1$ ) sur la dissipation d'énergie reste faible, et que par conséquent, il suffit de reconstruire le profil du champ d'endommagement dans la direction normale au trajet de fissuration lorsque sa valeur ultime  $a = 1$  a été atteinte en son centre. Ces deux méthodes sont testées pour un calcul élément fini 2D simulant la rupture d'une éprouvette CT

soumise à un chargement de traction : dans le premier cas on passe du modèle non local à une fissure équivalente et le calcul est poursuivi en mécanique linéaire de la rupture, dans le second on part d'une fissure préexistante pour déterminer le champ d'endommagement équivalent et le calcul est poursuivi avec le modèle non local.

## 1.2 Approches couplées continues - discontinues

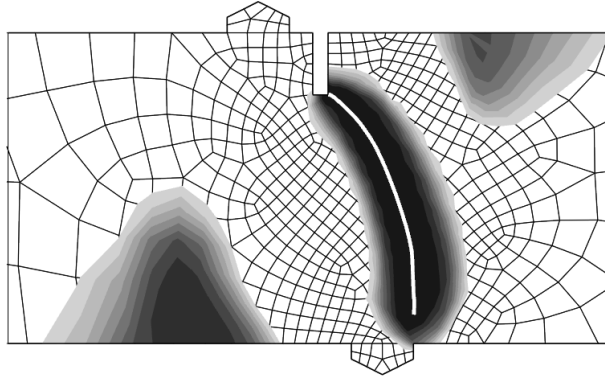
### 1.2.1 Transition à endommagement ultime

Ce type d'approche consistant à insérer des discontinuités du champ de déplacement dans les zones complètement endommagées permet d'éviter toute considération énergétique puisqu'*a priori* le modèle d'endommagement ne dissipe pratiquement plus d'énergie dans ces zones. Cette affirmation est à nuancer selon le type de régularisation employé pour le modèle d'endommagement : lorsqu'il s'agit d'une approche non locale intégrale ou à gradient implicite, comme c'est le cas dans [Simone *et al.*, 2003] et [Patzák et Jirásek 2003], la valeur critique  $a_{cr}$  de l'endommagement (au-delà de laquelle la discontinuité est insérée) est choisie très proche de l'unité mais strictement inférieure à 1 (par exemple  $a_{cr} = 0.999$  dans [Simone *et al.*, 2003]), et ce principalement pour introduire une coupure dans la régularisation. En effet, on a vu au chapitre 1 que ces modèles non locaux conduisent à un élargissement latéral pathologique de la bande de localisation lorsque l'endommagement tend vers 1, l'introduction d'une discontinuité en son centre permet alors de relâcher cette sur-régularisation puisque les lèvres de la fissure constituent alors une extension de la frontière de la structure, ce qui interdit le couplage entre deux points situés de part et d'autre de la fissure. Ainsi, dans le cas de matériaux quasi-fragiles, la réponse d'une structure sera d'autant plus fragile que  $a_{cr}$  sera choisi loin de l'unité.

Dans [Simone *et al.*, 2003], cette approche est développée en dimension deux pour des matériaux quasi-fragiles, avec un modèle d'endommagement régularisé par gradient implicite pour la partie continue, et une prise en compte des discontinuités dans la discrétisation via la méthode X-FEM (voir également [Patzák et Jirásek 2003], et [Wells *et al.*, 2002] dans le cas d'un comportement volumique plastique régularisé par une approche visqueuse). La propagation de la fissure s'appuie alors sur la réactualisation des fonctions level sets qui permettront d'enrichir localement la base d'interpolation du déplacement et de la déformation régularisée. En pratique, une discontinuité est insérée dans l'élément fini situé en amont de la pointe de fissure préexistante (en fait un segment traversant entièrement l'élément depuis la pointe) dès lors que le niveau d'endommagement y est supérieur à  $a_{cr}$  et cette procédure peut être réitérée tant que les éléments situés en amont vérifient ce critère d'amorçage. Le critère d'orientation permet quant à lui de définir la direction dans laquelle un incrément de fissure traverse chacun de ces éléments depuis la pointe précédente : initialement formulé en contraintes dans [Wells et Sluys, 2001], il permet ici de déterminer la direction  $\mathbf{d}$  d'accumulation maximale de déformation équivalente non locale  $e$  :

$$\mathbf{d} = \sum_{i \in S} e_i V_i \omega_i \frac{\mathbf{d}_i}{\|\mathbf{d}_i\|}, \quad \text{où} \quad \omega_i = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} r^3} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{d}_i\|^2}{2r^2}\right) \quad (2 - 6)$$

avec  $S$  l'ensemble des points d'intégration  $i$  situés dans un secteur angulaire donné en amont de la pointe de fissure.  $e_i$ ,  $V_i$ , et  $\omega_i$  sont respectivement la déformation équivalente non locale, le volume et la fonction de pondération associés au point  $i$ ,  $\mathbf{d}_i$  désigne quant à lui le vecteur allant de la pointe au point  $i$ . Dans l'expression de la pondération  $\omega_i$ ,  $r$  désigne le rayon d'interaction choisi comme quatre fois la longueur caractéristique du modèle non local. La Figure 2 - 2 extraite de [Simone *et al.*, 2003] montre que cette approche permet d'obtenir des trajets de fissuration complexes, ici pour la rupture d'une poutre entaillée soumise à un chargement antisymétrique de cisaillement quatre points.



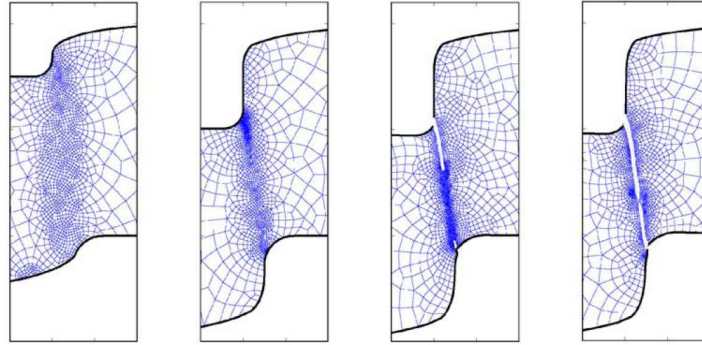
**Figure 2 - 2**

*Exemple de trajet de fissuration déterminé dans [Simone *et al.*, 2003].*

Dans le cas des matériaux ductiles endommageables, la prise en compte des grandes déformations s'avère parfois indispensable dans les simulations éléments finis et conduit alors à des éléments distordus ne permettant plus d'assurer la qualité de la solution, voire la convergence du calcul. Il est alors nécessaire d'avoir recours à un algorithme de remaillage (suivi d'un étape de transfert de champs sur le nouveau maillage) à la fin de certains pas de temps. Partant de ce constat, une approche consistant à mailler explicitement la fissure au cours de sa propagation via une méthode de remaillage est proposée dans [Mediavilla *et al.*, 2006a], pour le cas d'un modèle élastoplastique endommageable régularisé par gradient implicite, en grandes transformations. L'algorithme de remaillage décrit dans [Mediavilla *et al.*, 2006b] y est amélioré et formulé en vitesse d'endommagement pour mettre en place une stratégie d'adaptivité de maillage : les zones où l'endommagement se développe doivent être suffisamment raffinées tandis que celles qui sont totalement endommagées (et donc traversées par des fissures) et situées suffisamment loin de la *process zone*, peuvent être décrites avec une discrétisation beaucoup plus grossière. L'insertion d'une discontinuité est réalisée dans les régions où l'endommagement aux nœuds vaut 1 (ce champ extrapolé à partir des points de Gauss peut prendre des valeurs strictement supérieures à 1), et dans une direction donnée par un critère d'orientation comparable à (2 - 6). La Figure 2 - 3 extraite de [Mediavilla *et al.*, 2006a] illustre cette méthode sur le cas de l'emboutissage à l'emporte pièce d'une pièce métallique.

Plus récemment, toujours dans le cadre de la déchirure ductile, Feld-Payet a étendu ce type d'approche adaptative aux situations tridimensionnelles pour une formulation en petites perturbations dans [Feld-Payet, 2010]. La méthode proposée s'appuie sur l'algorithme de remaillage 3D développé par Chiaruttini *et al.* [Chiaruttini *et al.*, 2010] pour lequel un maillage surfacique auxiliaire est utilisé pour introduire explicitement des fissures dans le maillage volumique de calcul. Ce maillage auxiliaire est alors mis à jour dès que le critère de propagation est vérifié. En dimension deux, ce critère consiste à se placer en pointe de fissure et à localiser les maxima du champ

d'endommagement (lissé au préalable) comme le lieu où le produit scalaire de son gradient avec le vecteur orthoradial d'une fenêtre d'étude semi-circulaire change de signe. En dimension trois la même stratégie est appliquée dans les plans orthogonaux aux segments qui constituent la discrétisation de l'ancien front de fissure. Ce critère permet de localiser le chemin (linéique en 2D et surfacique en 3D) sur lequel le champ d'endommagement est maximal. Le maillage auxiliaire est alors étendu sur la portion de ce chemin où l'endommagement excède sa valeur critique.



**Figure 2 - 3**

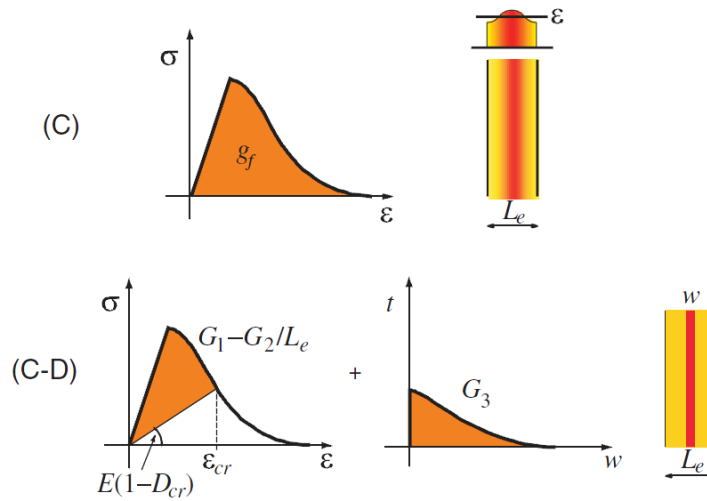
*Exemple de trajet de fissuration déterminé dans [Mediavilla et al., 2006a].*

### 1.2.2 Transition avant rupture : transfert local d'énergie

En introduction de cette partie, on a distingué deux sous catégories d'approches couplées en fonction du niveau d'endommagement volumique au-delà duquel le modèle continu bascule vers un modèle discontinu. Or, on a également vu au paragraphe précédent que dans le cas où cette transition est déclenchée pour un endommagement total, il était parfois préférable de choisir une valeur d'endommagement critique très faiblement inférieure à l'unité, principalement pour éviter les problèmes de sur-régularisation. Afin d'éviter toute confusion, on précise que la transition sera définie comme « déclenchée avant rupture » dès lors que la valeur de l'endommagement critique ne sera plus choisie suffisamment proche de 1 pour considérer que la part d'énergie de rupture ôtée au modèle continu reste négligeable. Dans ce cas, l'approximation d'un bilan énergétique restant inchangé en insérant des surfaces libres dans les zones où  $a \geq a_{cr}$  n'est plus valide, et le recours à modèles de zones cohésives devient nécessaire : ces fissures cohésives ont alors pour rôle de dissiper l'énergie qui aurait dû être dissipée par le modèle volumique.

Dans [Jirásek et Zimmermann, 2001b], une telle stratégie est mise en œuvre pour passer d'un modèle non local à un modèle de fissure cohésive en s'appuyant sur des éléments à discontinuité interne de type E-FEM. Le modèle non local est ici utilisé pour différer l'activation de la loi cohésive et fournir un critère d'orientation des fissures, donné par la direction de la déformation non locale principale maximale. Dans [Comi et al., 2007], cette méthodologie est développée pour des propagations de fissures rectilignes en mode I dans des milieux quasi-fragiles. Le passage d'un modèle non local intégral à un modèle de fissure cohésive est réalisé au moyen de la méthode X-FEM (voir [Mariani et Perego, 2003] pour le traitement d'interfaces cohésives avec la méthode X-FEM). Le changement de modèle est déclenché lorsque l'endommagement dépasse une valeur critique liée à la taille de maille dans la bande de localisation : plus le maillage y est raffiné, plus cette valeur critique est élevée. Afin de satisfaire le bilan énergétique, l'énergie restant

à dissiper par le modèle non local est concentrée au niveau de l'interface cohésive, selon le schéma extrait de [Comi *et al.*, 2007] (voir Figure 2 - 4).



**Figure 2 - 4**

*Principe du transfert énergétique proposé dans [Comi et al., 2007] :*

*(C) continu ; (C-D) continu – discontinu.*

L'expression de loi cohésive  $t(w)$  est calquée sur celle de la réponse uniaxiale contrainte – déformation du modèle d'endommagement continu. Les paramètres de cette loi d'interface sont ajustés de telle sorte que la contrainte critique  $t(0)$  corresponde bien à la contrainte normale au niveau de l'interface avant que la transition ne soit déclenchée, et que l'énergie de rupture  $G_3$  caractérisant cette loi soit bien celle qui aurait été dissipée par le modèle volumique jusqu'à rupture. Cette part d'énergie est quant à elle estimée analytiquement en faisant l'approximation que, pour l'approche continue seule, l'épaisseur de la bande de localisation n'évolue plus une fois que l'endommagement critique a été dépassé.

Dans [Cazes *et al.*, 2009], une loi cohésive thermodynamiquement équivalente à un modèle non local intégral fragile est construite sur la base du problème unidimensionnel d'un barreau en traction, en assurant l'égalité des incréments d'énergie dissipés par les deux modèles. Ces travaux ont ensuite été étendus à un modèle élastoplastique endommageable à gradient implicite dans [Cazes *et al.*, 2010]. Conjointement, cette équivalence a été utilisée dans [Simatos, 2010] pour mettre en place un modèle éléments finis (en dimension deux et trois) continu – discontinu destiné à modéliser la propagation de fissures en rupture ductile avec la méthode X-FEM. Cette fois ci, le modèle continu n'est plus régularisé et le modèle cohésif joue le rôle de limiteur de localisation. En effet, après une phase d'endommagement diffus, le comportement devient adoucissant et le modèle d'endommagement local quitte son domaine de validité puisqu'il entre en régime de localisation. Dès cet instant est déclenché le modèle de zone cohésive énergétiquement équivalent au modèle volumique, considéré cette fois ci dans sa version régularisée, et ce jusqu'à rupture. Si cette approche est valide pour la rupture ductile, elle nous semble difficilement applicable en rupture quasi-fragile. En effet le comportement d'un point matériel ne présentant pas de phase durcissante (caractérisée par un endommagement diffus), la mise en œuvre d'un modèle local conduirait automatiquement au régime de localisation, ce qui reviendrait à n'utiliser que le modèle cohésif. Il semble donc nécessaire dans le cas des matériaux quasi-fragiles, que la partie continue du modèle soit décrite par un modèle d'endommagement régularisé.

## 1.3 Bilan

L’objectif principal de notre étude est de mettre en place une approche mixte continue – discontinue permettant, étant donné un modèle continu d’endommagement quasi-fragile régularisé, de modéliser la propagation quasi-statique de fissures vues comme des surfaces de discontinuité du champ de déplacement. Ceci nous amène naturellement à privilégier la piste des approches couplées qui ont été détaillées au § 1.2, puisque leur implémentation unifie les descriptions continues et discontinues au sein d’un même modèle éléments finis, et semble conduire à des outils numériques relativement automatiques ne nécessitant *a priori* pas d’intervention de la part de l’utilisateur.

Pour ce type d’approche et dans le cas où la transition continu – discontinu intervient à endommagement ultime, on a vu que l’utilisation de méthodes de régularisation comme les formulations non locales à gradient implicite ou intégrales (qui sont en fait les plus populaires dans la littérature) pose le problème de la sur-régularisation, auquel remédie l’insertion de discontinuités libres à des niveaux d’endommagement inférieur mais très proche de l’unité. Si dans une première approximation on peut considérer que cela n’a pas d’impact sur le bilan énergétique, le choix de l’endommagement critique reste cependant délicat et peut avoir une influence sur la réponse globale d’une structure, comme cela est souligné dans [Simone *et al.*, 2003]. Toutefois, le recours à d’autres méthodes de régularisation qui ne présentent pas ce type d’inconvénient, comme par exemple la formulation à gradient d’endommagement proposée dans [Lorentz et Godard, 2011] et détaillée au chapitre 1, § 1.5.3, permettrait de déclencher la séparation matérielle pour un niveau d’endommagement exactement égal à 1. Sous ces conditions, cette approche devient une piste séduisante. Dans le cas où la transition a lieu avant rupture, il semble donc possible d’utiliser n’importe quelle technique de régularisation, pourvu que l’endommagement critique ne soit pas trop proche de l’unité et que le problème de la conservation de l’énergie entre les états endommagés et les états fissurés soit traité correctement, comme c’est le cas dans [Comi *et al.*, 2007]. Si cette approche semble donc offrir plus de généricité que la précédente, elle présente également un avantage supplémentaire qui réside dans la prise en compte automatique des conditions de contact via le modèle cohésif. En effet dans le cas d’une décharge conduisant à une refermeture des lèvres de la fissure, la condition de non interpénétration est directement gérée par la loi de comportement de l’interface cohésive (dans le cas de petits glissements), indépendamment de la méthode de discrétisation choisie.

Nous faisons donc le choix d’une approche couplant un modèle d’endommagement régularisé et un modèle de zone cohésive. Cette méthodologie devant être développée dans le *Code\_Aster*, le choix de la technique de régularisation se fera parmi deux formulations déjà implantées dans le code de calcul : la formulation non locale à gradient implicite portant sur la déformation et la formulation énergétique à gradient d’endommagement. En termes de performance, cette dernière est plus adaptée puisqu’elle conduit à l’introduction de deux degrés de liberté supplémentaires par nœuds sommets et à une matrice tangente symétrique, alors que la formulation en déformation régularisée conduit à quatre degrés de liberté supplémentaires par nœuds sommets (en 2D, six en 3D, le tenseur des déformations entier étant régularisé, il serait cependant possible de ne régulariser qu’une déformation équivalente soit 1 degré de liberté supplémentaire) et à une matrice non symétrique (voir chapitre 1, § 1.5.1.2). Au paragraphe 2.2 du présent chapitre, nous examinerons toutefois plus en détail ces deux formulations lors d’une étude semi-analytique unidimensionnelle, nous choisirons alors celle qui nous paraît la plus appropriée. Nous développerons ensuite sur la base de



ce problème 1D la transition vers un modèle cohésif en assurant exactement le transfert énergétique, et nous en proposerons une extension aux dimensions supérieures dans le cadre de la méthode des éléments finis.

Ceci pose alors la question du choix de la méthode de discrétisation des interfaces cohésives. Dans le cadre de cette thèse nous nous limitons à la propagation de fissures en mode I le long de trajets rectilignes ou plans (respectivement en dimension deux ou trois), le choix d'une discrétisation explicite de la fissure cohésive (dont le lieu est connu *a priori*) avec des éléments d'interface s'impose alors naturellement comme le moins délicat. Toutefois, pour des développements ultérieurs à ces travaux, d'autres méthodes de discrétisation doivent être envisagées, parmi lesquelles X-FEM semble très prometteuse d'après l'état de l'art exposé précédemment. Dans notre cas, ceci supposerait de développer un élément fini :

- i) dont les nœuds porteraient les degrés de liberté supplémentaires introduits par la formulation non locale décrivant le comportement volumique non linéaire précédant l'initiation de la fissure cohésive
- ii) dont les nœuds porteraient les degrés de liberté supplémentaires introduits avec l'enrichissement du déplacement standard par la fonction de Heaviside pour prendre en compte la discontinuité si la transition doit être déclenchée
- iii) capable dans ce cas de gérer un comportement surfacique non linéaire au niveau de cette discontinuité, la partie volumique de l'élément se voyant alors affecter un comportement élastique linéaire (avec un tenseur de Hooke dégradé par le champ d'endommagement atteint juste avant l'activation)

Le développement d'un tel élément semble très délicat : dans les travaux mentionnés ci-dessus et s'appuyant sur X-FEM, les éléments finis concernés ne vérifient pas simultanément les trois points précédents. Dans [Comi *et al.*, 2007] et [Simatos, 2010] seuls les points ii) et iii) sont vérifiés puisque l'on se place dans un continuum de Cauchy (déplacement standard aux nœuds, contraintes et variables internes aux points d'intégration) : dans le premier cas par le recours à un modèle non local intégral pour lequel la régularisation n'impacte que l'étape d'intégration du comportement, et dans le second par le recours à une formulation locale. A l'inverse, dans [Simone *et al.*, 2003] et [Patzák et Jirásek 2003] seuls les points i) et ii) sont vérifiés puisque dans ce cas ce sont des discontinuités libres qui sont introduites dans un continuum non local. A notre connaissance, aucun élément fini de ce type n'a été proposé dans la littérature. Le recours aux méthodes de remaillage nous paraît alors plus adapté au type d'approche que nous souhaitons développer : elles ont montré leur capacité dans [Mediavilla *et al.*, 2006a] et [Feld-Payet, 2010], elles permettent de plus de procéder avec un même outil à des stratégies de maillages adaptatifs (raffinement des *process zones*, et déraffinement des zones cohésives totalement fissurées) et ainsi de gagner en performance.

## 2 Etude semi-analytique unidimensionnelle

On souhaite ici développer une stratégie permettant de passer d'un modèle d'endommagement continu (et régularisé) à un modèle discontinu de fissuration de type cohésif. Afin de s'assurer des bonnes propriétés de notre approche, elle est dans un premier temps construite sur la base d'un problème modèle volontairement simplifié : celui d'une barre fragile unidimensionnelle soumise à un chargement monotone croissant de traction, l'évolution étant quasi-statique. Son caractère unidimensionnel nous permet de travailler dans un cadre analytique ou semi-analytique : on essaye autant que possible d'extraire explicitement les solutions et d'avoir recours le moins possible à des méthodes numériques (la méthode des éléments finis étant ici exclue, le ratio précision/coût étant jugé peu satisfaisant). Ceci nous fournira par la suite des solutions de référence permettant de valider certains aspects de l'implémentation faite par la suite dans notre code éléments finis. Cette étude se divise en deux parties :

- La première vise à déterminer la solution du problème décrit uniquement par un modèle d'endommagement continu. On cherche notamment à y évaluer les deux méthodes de régularisation retenues : gradient implicite et gradient d'endommagement.
- La seconde consiste à construire des lois cohésives permettant de basculer du modèle continu au modèle cohésif à un niveau quelconque de chargement (et donc d'endommagement) tout en assurant la continuité de la réponse et l'équivalence énergétique.

### 2.1 Description du problème continu

On considère une barre unidimensionnelle de longueur  $2L$ , initialement saine et constituée d'un matériau dont le comportement fragile est caractérisé par un modèle d'endommagement régularisé, soit par la formulation à gradient implicite, soit à gradient de variable interne. On note  $\Omega = ]-L, L[$  la configuration de référence, et  $U$  l'amplitude du déplacement imposé en  $x = \pm L$  (voir Figure 2 - 5) dont la valeur croît continûment avec le temps.

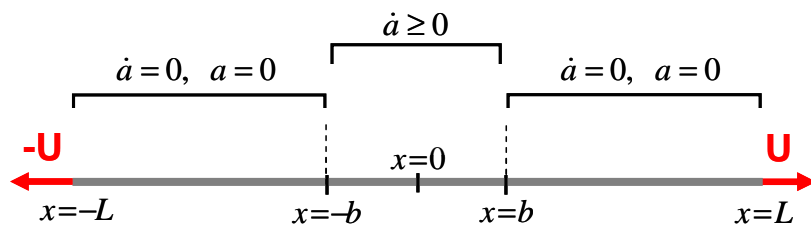


Figure 2 - 5

*Barre unidimensionnelle en traction : solution inhomogène symétrique pour l'approche continue régularisée avec localisation de l'endommagement au centre.*

On cherche à déterminer la solution inhomogène en espace et symétrique pour laquelle l'endommagement évolue dans une bande centrée en  $x = 0$ , sans tenir compte des problèmes de stabilité déjà traités analytiquement pour ce cas unidimensionnel dans le cas de la formulation à gradient d'endommagement (voir [Benallal et Marigo, 2007] et [Pham, 2010]).

La condition de symétrie permet de restreindre l'étude à la demi barre  $[0, L]$ , et de considérer ainsi une localisation de l'endommagement dans une demi bande que l'on notera  $[0, b[$  (voir Figure 2 - 5), dont la borne  $b$  dépend *a priori* du niveau de chargement. Formellement, ceci revient à résoudre le système différentiel non linéaire suivant, donné par les conditions de charge – décharge :

$$\begin{cases} f = 0 \text{ et } \dot{a} > 0 \text{ dans } [0, b[ \\ f < 0 \text{ et } \dot{a} = 0 \text{ dans } ]b, L] \end{cases} \quad (2 - 7)$$

En faisant l'hypothèse d'un chargement continu dans  $[0, b[$  (*i.e.* aucune décharge élastique n'y est autorisée), ce qui se traduit par la stricte positivité de  $\dot{a}$  à la première ligne du système (2 - 7), et dans le cas où la demi largeur de bande endommagée  $b$  croît strictement avec le paramètre de chargement, le système (2 - 7) peut être intégré par des méthodes (analytiques ou semi-analytiques) simples puisque la condition d'irréversibilité de l'endommagement y est automatiquement assurée. Dans les autres cas, son intégration s'avère plus délicate et la méthode des éléments finis semble être la plus pratique pour gérer l'irréversibilité (en chaque point d'intégration lors de l'intégration du comportement). Ne souhaitant pas avoir recours à cette dernière pour mener notre étude, on s'attachera à utiliser des lois de comportement assurant un caractère strictement croissant à la bande de localisation.

Remarque :

*Si de telles lois de comportement non locales sont nécessaires pour résoudre de manière simple ce problème unidimensionnel, cette propriété leur confère également un atout lors de leur mise en œuvre dans le cadre de la méthode des éléments finis en dimension deux et trois. En effet, comme cela a été montré dans [Lorentz et Godard, 2011], ceci permet d'éviter d'éventuelles décharges élastiques au sein de la bande d'endommagement qui se traduisent par la présence de micro snap-backs dans la réponse globale de la structure, ce qui a pour conséquence de détériorer la convergence du calcul.*

En l'absence de forces volumiques, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\sigma' = 0 \text{ dans } [0, L] \quad (2 - 8)$$

et assure que la contrainte reste homogène dans la barre. Elle croît de 0 à  $\sigma_y$  (avec  $\sigma_y$  la contrainte critique) lors de la phase élastique ce qui correspond à un déplacement imposé croissant de 0 à  $U_y = L\varepsilon_y = L\sigma_y/E$ , et décroît de  $\sigma_y$  à 0 dans la phase adoucissante.

La relation contrainte – déformation reste la même pour les deux formulations non locales retenues :

$$\sigma = A(a)E\varepsilon \quad (2 - 9)$$

On détaille par la suite dans deux parties distinctes la solution du problème pour les deux formulations non locales.

## 2.2 Solution pour la formulation à gradient de variable interne

La résolution semi-analytique de ce problème a déjà été traitée dans [Lorentz et Godard, 2011] pour la formulation à gradient d'endommagement, on en rappelle ci-dessous les étapes importantes dans la mesure où elles restent proches de celles que l'on détaillera par la suite pour la formulation à gradient implicite. Le facteur de rigidité intervenant dans la relation contrainte – déformation s'écrit :

$$A(a) = \left( \frac{1-a}{1+\gamma a} \right)^2, \quad \gamma > 0 \quad (2 - 10)$$

Celui-ci permet notamment d'assurer le caractère croissant de la bande de localisation lorsque  $\gamma \geq 2.8$ . On rappelle également l'expression (1-47) ii) de la fonction seuil qui, pour cette formulation non locale fait intervenir le laplacien de la variable d'endommagement :

$$f(Y, \nabla^2 a) = Y + c \nabla^2 a - k, \quad \text{avec } Y = -A'(a) \Phi_{el}(\varepsilon) \quad (2 - 11)$$

Dans la partie  $[0, b]$  de la barre qui se trouve en régime non linéaire, cette fonction s'annule, on doit donc résoudre l'équation différentielle non linéaire d'ordre 2 suivante où le niveau de chargement est paramétré par l'énergie de déformation élastique  $\Phi_{el}(\varepsilon)$ , et avec des conditions aux limites dictées par la symétrie du problème et la classe de régularité  $C^1$  de la solution :

$$f = 0 \Rightarrow c \frac{d^2 a}{dx^2} - \Phi_{el}(\varepsilon) A'(a) - k = 0 \quad \text{dans } ]0, b[,$$

$$\text{avec les conditions } \begin{cases} a(b) = 0 ; \quad \frac{da}{dx}(b) = 0 \\ a(0) = a_0 ; \quad \frac{da}{dx}(0) = 0 \end{cases} \quad (2 - 12)$$

Afin de formuler le problème avec le champ d'endommagement pour unique inconnue, le chargement est paramétré (via la contrainte  $\sigma$ ) par la valeur  $a_0 = a(0)$  de l'endommagement au centre de la bande de localisation. L'équation (2 - 12) se réécrit alors :

$$c \frac{d^2 a}{dx^2} - \frac{A'(a)}{A^2(a)} \frac{\sigma^2}{2E} - k = 0, \quad \text{avec } \sigma = \sqrt{\frac{2Eka_0}{A^{-1}(a_0) - 1}} \quad (2 - 13)$$

Cette équation différentielle admet une intégrale première, ce qui permet de réduire le problème à l'équation d'ordre 1 suivante :

$$\left(\frac{da}{dx}\right)^2 = G(a_0, a) \text{ et } \frac{da}{dx} < 0 \text{ sur } ]0, b[$$

$$\text{avec } G(a_0, a) = \frac{2ka_0}{c} \left( \frac{a}{a_0} - \frac{A(a)^{-1} - 1}{A(a_0)^{-1} - 1} \right) \quad (2 - 14)$$

Enfin, (2 - 14) conduit à une équation différentielle à variables séparables, dont on tire la relation implicite suivante, où  $x(a_0, a)$  est la bijection réciproque de  $a(a_0, x)$  pour chaque niveau de chargement  $a_0$  :

$$x(a_0, a) = \int_a^{a_0} G(a_0, s)^{-1/2} ds, \text{ en particulier } b(a_0) = x(a_0, 0) \quad (2 - 15)$$

Lorsque  $a_0 = 1$ , la barre rompt et la contrainte devient nulle, l'équation différentielle (2 - 13) admet alors la forme dégénérée suivante:

$$c \frac{d^2 a}{dx^2} - k = 0 \quad (2 - 16)$$

Le profil d'endommagement ultime  $a_u$  correspondant est alors parabolique, et la condition de dérivée nulle (2 - 12) en  $x = 0$  n'est plus vérifiée :

$$a_u(x) = \left(1 - \frac{x}{D}\right)^2 \text{ où } D = \sqrt{\frac{2c}{k}} \quad (2 - 17)$$

où  $D = b(1)$  désigne la demi largeur de la bande de localisation à rupture. Disposant de cette expression analytique simple, il est alors possible de calculer l'énergie de rupture  $G_f$ , qui peut s'interpréter comme la somme de l'énergie dissipée  $ka_u$  et de l'énergie stockée jusqu'à ce stade :

$$G_f = \int_{-L}^L \left( ka_u(x) + \frac{c}{2} (\nabla a_u(x))^2 \right) dx \Rightarrow G_f = \frac{4}{3} kD \quad (2 - 18)$$

Il est donc montré que les trois paramètres internes  $k$ ,  $c$ , et  $\gamma$  du modèle peuvent s'exprimer en fonction de paramètres macroscopiques observables comme le module d'Young  $E$ , la contrainte critique  $\sigma_y$ , l'énergie de rupture  $G_f$  et la largeur de la bande de localisation à rupture  $2D$ . La dernière relation faisant intervenir le paramètre  $\gamma$  est obtenue en écrivant la condition d'évolution de l'endommagement  $f = 0$ . En effet, la première fois que ce seuil est atteint en fin de phase élastique, le champ d'endommagement est encore homogène, la nullité de (2 - 11) s'écrit alors :

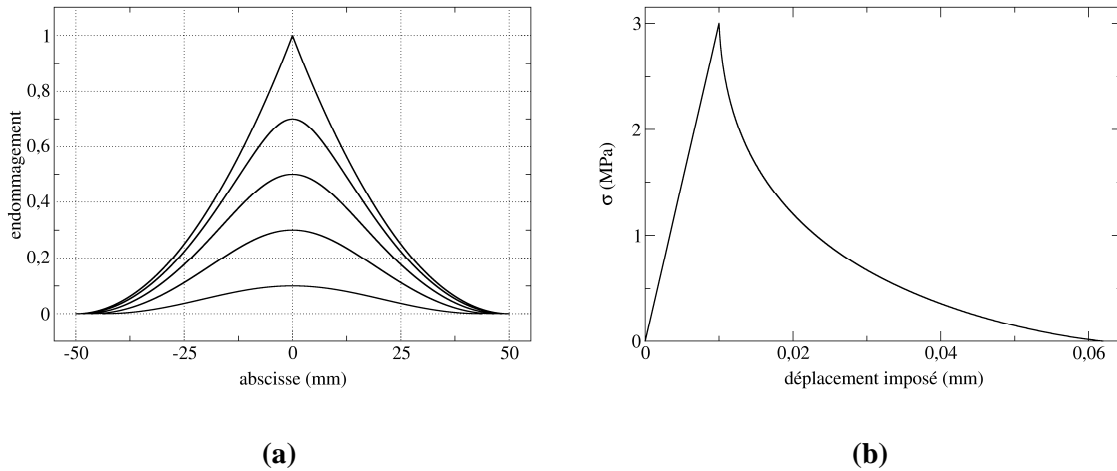
$$-A'(0) \frac{\sigma_y^2}{2E} - k = 0 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{\frac{kE}{1+\gamma}} \quad (2 - 19)$$

On peut alors tirer des relations (2 - 17), (2 - 18), et (2 - 19) l'expression des paramètres internes en fonction des paramètres observables :

$$k = \frac{3}{4} \frac{G_f}{D} ; c = \frac{3}{8} G_f D ; \gamma = \frac{3}{4} \frac{EG_f}{\sigma_y^2 D} - 1 \quad (2 - 20)$$

Et la condition  $\gamma > 0$  intervenant dans l'expression du paramètre de rigidité (2 - 10) se traduit alors par :

$$D < \frac{3}{4} \frac{EG_f}{\sigma_y^2} \quad (2 - 21)$$



**Figure 2 - 6**

*Barre unidimensionnelle en traction, solution inhomogène symétrique avec localisation de l'endommagement au centre pour la formulation à gradient d'endommagement :  
(a) profils d'endommagement ; (b) réponse globale contrainte-déplacement.*

Les résultats présentés à la Figure 2 - 6 ont été obtenus pour une barre de longueur  $2L = 200\text{mm}$ , et avec des paramètres matériau choisis (voir Tableau 2 - 1) pour représenter le comportement du béton en traction (le comportement en compression n'est pas pris en compte par le modèle).

Paramètres macroscopiques observables	Paramètres internes du modèle
$E = 3.10^4 \text{ MPa}$ $\sigma_y = 3 \text{ MPa}$ $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ $2D = 100 \text{ mm}$	$k = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$ $\gamma = 4$ $c = 1.875 \text{ N}$

**Tableau 2 - 1**

*Paramètres matériaux représentatifs d'un matériau de type béton.*

La figure (a) présente les profils d'endommagement obtenus pour différents niveau de chargement (le profil pointu correspond au champ d'endommagement à rupture  $a_u$ ), et la figure (b) illustre la réponse globale contrainte – déplacement. On peut noter qu'outre la possibilité d'identifier sur ce cas simple les paramètres du modèle, la rupture du barreau intervient pour un déplacement imposé fini (pas de comportement asymptotique sur la réponse contrainte – déplacement Figure 2 - 6 (a)).

## 2.3 Solution pour la formulation à gradient implicite

### 2.3.1 Mise en équations

On se propose ici de résoudre le problème dans le cas où la formulation non locale s'appuie sur un opérateur de délocalisation de type gradient implicite [Peerlings *et al.*, 1996] présenté au chapitre 1, § 1.5.1.1, et s'appliquant à une déformation équivalente dont on rappelle la formulation forte ci-dessous, où  $\ell$  désigne la longueur interne :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{eq} - \ell^2 \nabla^2 \bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \bar{\varepsilon}_{eq} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2 - 22)$$

Le problème étant unidimensionnel, la déformation est un scalaire et le chargement monotone de traction assure la positivité de la déformation : la déformation locale  $\varepsilon$  est dans ce cas égale à la déformation équivalente locale  $\varepsilon_{eq}$  sur laquelle s'applique classiquement ce type de régularisation.

On a donc, pour l'opérateur de régularisation :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} - \ell^2 \bar{\varepsilon}'' = \varepsilon & \text{dans } ]0, L[ \\ \bar{\varepsilon}'(L) = 0 \end{cases} \quad (2 - 23)$$

De plus, la régularité du champ  $\bar{\varepsilon}$  impose d'avoir un raccord  $C^1$  en  $x = b$  (interface entre la bande de localisation et la partie saine), régularité à laquelle se combine la condition de symétrie imposant une dérivée nulle du champ  $\bar{\varepsilon}$  au point  $x = 0$ . On a donc le jeu de conditions suivant :

$$\bar{\varepsilon}'(0) = 0 \text{ et } \begin{cases} \llbracket \bar{\varepsilon} \rrbracket_{x=b} = 0 \\ \llbracket \bar{\varepsilon}' \rrbracket_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (2 - 24)$$

Il reste encore à définir la densité d'énergie libre  $\Phi$  ainsi que la forme de la fonction seuil  $f$  intervenant dans (2 - 7) afin de caractériser complètement notre système d'équations. Afin de rester cohérent avec ce qui a été fait pour la formulation non locale à gradient d'endommagement, on gardera la même expression pour  $f$  et  $\Phi$ . Le système (2 - 7) s'écrit alors :

$$\begin{cases} -A'(a)\Phi_{el}(\bar{\varepsilon}) - k = 0 \text{ et } \dot{a} > 0 & \text{dans } [0, b[ \\ -A'(a)\Phi_{el}(\bar{\varepsilon}) - k < 0 \text{ et } \dot{a} = 0 & \text{dans } ]b, L] \end{cases} \quad (2 - 25)$$

La première ligne de ce système fournit dans la (demi) bande de localisation  $[0, b[$  une relation biunivoque entre la déformation régularisée  $\bar{\varepsilon}$  et la variable d'endommagement  $a$  grâce à l'hypothèse évoquée plus haut pour laquelle on suppose qu'il ne peut y avoir de décharges élastiques dans cette zone de la barre :

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{-2k}{A'(a)E} \quad (2 - 26)$$

Enfin, on introduit les notations ainsi que les variables normalisées suivantes pour alléger l'écriture des calculs présentés par la suite :

- $v = \bar{\varepsilon}/\varepsilon_y$  la déformation régularisée normalisée
- $\tau = \sigma/\sigma_y$  la contrainte normalisée
- $S(v) = 1/A(a(v))$  le facteur de souplesse
- $w_y = \Phi_{el}(\varepsilon_y)$  l'énergie élastique seuil

où  $\varepsilon_y$  désigne la déformation seuil du matériau initialement sain et  $\sigma_y = E\varepsilon_y$  la contrainte seuil correspondante. Notons qu'exprimer le facteur de souplesse  $S$  comme une fonction de la déformation régularisée n'a de sens que si l'on peut exprimer  $a(v)$ , et c'est le cas grâce à l'hypothèse de chargement continu permettant d'écrire (2 - 26). À l'aide de ces variables normalisées, et moyennant le changement de variables  $x \leftarrow \ell x$  sur la variable d'espace le problème à résoudre pour chaque niveau de contrainte normalisée  $\tau$  peut se formuler de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & v - v'' = \tau S(v) \text{ dans } [0, L] \\ \text{ii)} \quad & v^2 = \frac{-k}{w_y A'(a)} \text{ dans } [0, b[ \end{aligned} \quad (2 - 27)$$

où i) représente l'opérateur de régularisation (2 - 23) et ii) la relation déformation régularisée – endommagement (2 - 26). Notons qu'après avoir fait le changement de variable  $x \leftarrow \ell x$  on conserve les mêmes notations que précédemment pour la variable d'espace ( $x, b, L$ ) ainsi que pour le champ de déplacement au sein de la barre. On gardera donc à l'esprit cet abus de notation lors des applications numériques.

### 2.3.2 Résolution dans la partie linéaire

Sur l'intervalle  $]b, L[$  l'endommagement n'évolue pas et l'équation différentielle (2 - 27) i) est linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$v - v'' = \tau \quad (2 - 28)$$

la solution est donc de la forme :



$$v(x) = \tau + \alpha \exp(-x) + \beta \exp(x) \quad (2 - 29)$$

Comme le comportement est élastique dans la partie  $]b, L[$  et que l'endommagement ne s'y est pas développé, la déformation régularisée  $y$  est bornée par la déformation seuil, ce qui fixe nécessairement  $\beta = 0$ . De plus ce seuil est atteint en  $x = b$ , c'est-à-dire  $v(b) = 1$ . On en tire donc l'expression de la déformation régularisée dans la partie saine :

$$v(x) = \tau + (1 - \tau) \exp(-(x - b)) \text{ dans } ]b, L[ \quad (2 - 30)$$

### 2.3.3 Résolution dans la partie non linéaire

Comme cela a été fait précédemment pour le modèle non local à gradient d'endommagement, il est possible de paramétrer indifféremment le niveau de chargement en phase post-pic par le déplacement imposé  $U = U(L)$ , par le niveau de contrainte  $\tau$ , ou encore par la valeur de l'endommagement  $a_0 = a(0)$  au centre de la bande de localisation ou celle de la déformation régularisée  $v_0 = v(0) > 1$  en ce même point en utilisant la relation (2 - 27) ii). Bien que la déformation régularisée  $v$  soit la variable ayant le moins de sens physique parmi celles permettant de paramétrer le problème, nous choisissons pour l'instant sa valeur en  $x = 0$  comme paramètre de chargement,  $v$  étant l'inconnue de (2 - 27) i) et  $v_0$  fournissant une condition aux limites supplémentaire. On dispose donc du jeu de conditions suivant sur  $v$  :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & v(0) = v_0 \text{ et } v'(0) = 0 \\ \text{ii)} \quad & \llbracket v \rrbracket_{x=b} = 0 \\ \text{iii)} \quad & \llbracket v' \rrbracket_{x=b} = 0 \end{aligned} \quad (2 - 31)$$

Dans l'intervalle  $[0, b]$  l'équation différentielle non linéaire (2 - 27) i) admet une intégrale première qui s'écrit comme suit :

$$\frac{1}{2} (v^2(x) - v^2(0) - v'^2(x) + v'^2(0)) = \tau (\tilde{S}(v(x)) - \tilde{S}(v(0))), \quad \forall x \in [0, b] \quad (2 - 32)$$

où  $\tilde{S}$  désigne une primitive du facteur de souplesse  $S$ . En tenant compte des conditions aux limites (2 - 31) i), cette expression se réduit à :

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2 - v'^2) = \tau (\tilde{S}(v) - \tilde{S}(v_0)) \text{ dans } [0, b] \quad (2 - 33)$$

En évaluant cette expression au point  $x = b$ , on aboutit à une relation entre la contrainte  $\tau$  et le paramètre de chargement  $v_0$ . Il faut pour cela tenir compte de la condition de raccord (2 - 31) ii) portant sur  $v'$  et utiliser son expression dans la partie élastique, donnée par (2 - 30). Il vient alors :

$$1 - v_0^2 - (1 - \tau)^2 = 2\tau (\tilde{S}(1) - \tilde{S}(v_0)) \quad (2 - 34)$$

Il s'agit d'une équation du second degré d'inconnue  $\tau$  :

$$\tau^2 - 2(1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1))\tau + v_0^2 = 0 \quad (2 - 35)$$

Son discriminant  $\Delta$  vaut :

$$\Delta = 4 \left( (1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1))^2 - v_0^2 \right) = 4 \left( 1 + v_0 + \int_1^{v_0} S(v) dv \right) \int_1^{v_0} (S(v) - 1) dv \quad (2 - 36)$$

On s'assure bien de la stricte positivité de ce discriminant puisqu'on a l'équivalence :

$$(\forall v \in ]1, v_0], S(v) - 1 > 0) \Leftrightarrow (\forall a \in ]0, a_0], 0 < A(a) < 1) \quad (2 - 37)$$

L'équation (2 - 35) admet donc deux racines réelles distinctes :

$$\tau = (1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1)) \left( 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1)} \right)^2} \right) \quad (2 - 38)$$

Or on sait que lors de la phase post-pic la valeur de la contrainte normalisée  $\tau$  décroît de 1 (état initial correspondant à la fin de la phase élastique) à 0 (rupture du barreau) à mesure que l'endommagement se développe. Parmi les deux solutions (2 - 38), une seule reste toujours dans l'intervalle  $[0, 1]$  quelque soit la valeur (admissible) du paramètre de chargement  $v_0$  (l'autre solution reste toujours supérieure à 1). Ainsi la seule solution conservant un sens physique et que l'on considérera par la suite est la suivante :

$$\tau(v_0) = (1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1)) \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1)} \right)^2} \right) \quad (2 - 39)$$

Disposant d'une relation entre la contrainte et le paramètre de chargement, l'équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire (2 - 27) i) est désormais correctement paramétrée et on peut en poursuivre la résolution. On rappelle ci-dessous l'intégrale première (2 - 33) :

$$v'^2 = v^2 - v_0^2 - 2\tau(v_0)(\tilde{S}(v) - \tilde{S}(v_0)) \text{ dans } [0, b] \quad (2 - 40)$$

Comme la déformation régularisée atteint son maximum  $v_0$  au point  $x = 0$  et décroît jusqu'à sa valeur seuil 1 au point  $x = b$ , on a  $v' \leq 0$  dans  $]0, b[$ . Il découle alors de (2 - 40) l'équation à variables séparables suivante :

$$\frac{dv}{dx} = -\sqrt{g(v) - g(v_0)}, \text{ avec } g(v) = v^2 - 2\tau(v_0)\tilde{S}(v) \quad (2 - 41)$$

conduisant à l'intégrale impropre suivante :

$$x(v) = \int_v^{v_0} \frac{du}{\sqrt{g(u) - g(v_0)}} \quad (2 - 42)$$

L'intégrande (2 - 42) est singulière en la borne  $v_0$  ; on doit donc en étudier la convergence. On a d'une part le développement limité suivant :

$$g(u) - g(v_0) = -g'(v_0)(v_0 - u) + o_{u \rightarrow v_0}(v_0 - u) \quad (2 - 43)$$

avec  $g'(v_0) = 2(v_0 - \tau S(v_0)) = \frac{2}{\varepsilon_y}(\bar{\varepsilon}(0) - \varepsilon(0)) < 0$  car la déformation locale est nécessairement supérieure à la déformation régularisée au centre de la bande de localisation. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-g'(v_0)}\sqrt{v_0 - u}}{\sqrt{g(u) - g(v_0)}} &= (1 + o_{u \rightarrow v_0}(1))^{-1/2} \\ &= 1 + o_{u \rightarrow v_0}(1), \text{ pour } u < v_0 \end{aligned} \quad (2 - 44)$$

On en déduit donc un équivalent de l'intégrande (2 - 42) au voisinage de la borne  $v_0$

$$\frac{1}{\sqrt{g(u) - g(v_0)}} \underset{u < v_0}{\overset{u \rightarrow v_0}{\sim}} \frac{1}{\sqrt{-g'(v_0)}\sqrt{v_0 - u}} \quad (2 - 45)$$

Or on sait que  $u \mapsto 1/u^\alpha$  est intégrable au voisinage de 0 pour  $\alpha < 1$ , et comme l'intégrande (2 - 42) est positive, l'intégrale est bien définie.

### 2.3.4 Bilan

Pour chaque niveau de chargement en phase post-pic on résout le problème sur  $[0, L]$ . Ce problème comporte une partie non linéaire (dans la zone  $[0, b]$  en propagation dans laquelle l'endommagement se développe) et une partie linéaire (dans la zone  $[b, L]$  où le comportement est élastique linéaire).

- Le niveau de chargement est paramétré par la valeur de la déformation régularisée  $v_0 > 1$  au point  $x = 0$ . La valeur correspondante de la contrainte  $\tau$  est donnée par la relation suivante, où  $\tilde{S}$  désigne une primitive du facteur de souplesse  $S$  :

$$\tau(v_0) = (1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1)) \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1)} \right)^2} \right) \quad (2 - 46)$$

- Dans la partie non linéaire  $[0, b]$ , on dispose d'une relation entre la variable d'espace  $x$  et la déformation régularisée  $v$ ,  $x(v)$  désignant la bijection réciproque de  $v(x)$ . Cette relation n'a de sens que si la taille  $b$  de la bande de localisation est une fonction strictement croissante du chargement  $v_0$  :

$$x(v) = \int_v^{v_0} G(u, v_0) du, \text{ en particulier } b = \int_1^{v_0} G(u, v_0) du \quad (2 - 47)$$

avec  $G(v, v_0) = \left( v^2 - v_0^2 - 2\tau(v_0)(\tilde{S}(v) - \tilde{S}(v_0)) \right)^{\frac{1}{2}}$

- Enfin, dans la partie linéaire  $[b, L]$ , on a l'expression analytique :

$$v(x) = \tau(v_0) + (1 - \tau(v_0)) \exp(-(x - b)) \quad (2 - 48)$$

Notons qu'à ce stade, la construction d'une solution analytique repose sur le choix du facteur de rigidité  $A$  intervenant dans l'expression de la densité d'énergie libre  $\Phi$ . Il doit être choisi d'une part tel que  $v_0 \mapsto b(v_0)$  soit une fonction strictement croissante, et d'autre part tel que l'on puisse calculer formellement une primitive  $\tilde{S}$  du facteur de souplesse  $S$  intervenant dans (2 - 46) et (2 - 47), et que son expression soit suffisamment simple pour calculer analytiquement une primitive de  $G$  dans (2 - 47). Comme il semble très difficile de respecter simultanément ces trois conditions, on s'attache avant tout à s'assurer que le choix de  $A$  conduit bien à la stricte croissance de  $v_0 \mapsto b(v_0)$ , sans quoi la solution calculée ne tient pas compte de la condition d'irréversibilité de l'endommagement et n'a donc aucune valeur physique. Une fois cette condition respectée on s'attachera à choisir  $S$  qui soit de plus analytiquement primitivable. Étant donnée l'expression de  $G$  dans (2 - 47), respecter la dernière condition s'avère délicat, on s'autorisera donc à utiliser une méthode numérique simple et précise pour intégrer (2 - 47).

### 2.3.5 Intégration numérique

La méthode la plus naturelle pour approcher (2 - 47) revient à partitionner le segment  $[1, v_0]$  en  $N$  sous segments de même amplitude :  $[1, v_0] = \bigcup_{i=1}^N K_i$  et d'y approcher l'intégrale élémentaire  $I_{K_i}$  par une méthode d'intégration numérique (trapèzes, quadrature de Gauss...). La primitive  $x(v_i)$  au point milieu du segment  $K_i$  est alors exprimée comme la somme cumulée :

$$x(v_i) = \sum_{p=1}^i I_{K_p} \quad (2 - 49)$$

Toutefois, comme on cherche à intégrer une fonction présentant une forte singularité au voisinage de la borne  $v_0$ , ce recours ne semble pas le plus adapté pour contrôler l'erreur d'approximation.

On préfère alors intégrer directement l'équation différentielle (2 - 41) avec un schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 (RK4) qui, sous des hypothèses de régularité suffisantes, assure que l'erreur commise à chaque pas  $h$  est en  $O(h^5)$  et en  $O(h^4)$  pour l'erreur accumulée. Ce schéma s'applique à des EDO d'ordre 1, éventuellement vectorielles et de type :

$$\frac{d}{dx}V = F(x, V) \text{ avec la condition initiale (CI) } V(x_0) = V_0 \quad (2 - 50)$$

Avec ces notations, le schéma de RK4 s'écrit alors :

Soit  $V_0 = \begin{pmatrix} v_0^{(1)} & \dots & v_0^{(N_{\text{dim}})} \end{pmatrix}^T$  la CI et  $h$  un pas constant

**Pour**  $n = 0, N_{\text{pas}} - 1$  **faire** :

$$\begin{aligned} K_1 &:= F(x_n, V_n) \\ K_2 &:= F\left(x_n + \frac{h}{2}, V_n + \frac{h}{2} K_1\right) \\ K_3 &:= F\left(x_n + \frac{h}{2}, V_n + \frac{h}{2} K_2\right) \\ K_4 &:= F(x_n + h, V_n + h K_3) \\ V_{n+1} &:= V_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned} \quad (2 - 51)$$

En appliquant directement ce schéma à l'EDO (2 - 41) rappelée ci-dessous, ce schéma ne permet pas d'approcher la solution souhaitée.

$$\frac{dv}{dx} = -\sqrt{g(v) - g(v_0)}, \text{ avec la CI } v(0) = v_0 \quad (2 - 52)$$

En effet la fonction constante  $x \mapsto v_0$  est clairement une solution du problème (2 - 52), elle correspond à la solution pour laquelle l'endommagement et la déformation locale évoluent de façon homogène dans la barre. Or, il se trouve que c'est la seule solution que le schéma RK4 (2 - 51) permet d'approcher (il suffit d'en écrire la première itération pour s'en apercevoir), il convient donc de reformuler le problème si l'on souhaite aboutir à la solution inhomogène. On considère donc à nouveau l'EDO scalaire d'ordre 2 (2 - 27) i), qu'on ramène au système différentiel autonome d'ordre 1 suivant en posant  $v^{(1)} = v$  et  $v^{(2)} = v'$  :

$$\begin{cases} \frac{dv^{(1)}}{dx} = v^{(2)} \\ \frac{dv^{(2)}}{dx} = v^{(1)} - \tau(v_0)S(v^{(1)}) \end{cases}, \text{ avec la CI } \begin{cases} v_0^{(1)} = v_0 \\ v_0^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (2 - 53)$$

En écrivant la première itération du schéma RK4 pour ce système différentiel, on s'aperçoit que la solution approchée n'est plus la solution constante, on verra par la suite que sa mise en œuvre conduit bien au type de solution attendu. Notons que pour intégrer le plus précisément possible (2 - 53), il faut pouvoir calculer exactement la contrainte  $\tau(v_0)$  et donc choisir le facteur de rigidité tel que le terme  $\tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1)$  intervenant dans l'expression de  $\tau(v_0)$  (2 - 46) puisse être déterminé analytiquement.

### 2.3.6 Choix du facteur de rigidité

On a vu précédemment que dans le cas de la formulation à gradient d'endommagement, Lorentz et Godard [Lorentz et Godard, 2011] proposent une expression du facteur de rigidité en fraction rationnelle de la variable d'endommagement afin d'assurer le caractère croissant de la taille de la bande de localisation. On rappelle cette expression :

$$A(a) = \left( \frac{1-a}{1+\gamma a} \right)^m, \quad m \geq 1, \quad \gamma > 0 \quad (2 - 54)$$

En choisissant cette expression dans notre cas, la *loi de comportement locale* associée (i.e. la densité d'énergie libre locale et le potentiel de dissipation) reste identique mais la *loi de comportement non locale* n'en reste pas moins différente puisque l'opérateur de régularisation n'est plus de même nature (le modèle à gradient d'endommagement constitue une formulation énergétique, tandis que modèle à gradient implicite fait appel à un opérateur de régularisation extérieur à la formulation et de nature purement numérique). Il n'est donc pas garanti d'observer les mêmes propriétés (ce que nous examinerons au paragraphe suivant), mais comme le montrent les calculs présentés ci-dessous, l'expression (2 - 54) permet dans un premier temps de déterminer exactement  $\tau(v_0)$ . Partant de (2 - 54), on peut expliciter la relation biunivoque (2 - 27) ii) entre la déformation régularisée et la variable d'endommagement :

$$v^2 = \frac{k}{mw_y(1+\gamma)} \frac{(1+\gamma a)^{m+1}}{(1-a)^{m-1}} \text{ sur } [0, b] \quad (2 - 55)$$

en particulier au bord de la bande de localisation ( $x = b$ ) la déformation régularisée normalisée est égale à la valeur du seuil élastique ( $v = 1$ ) et l'endommagement  $y$  est nul ( $a = 0$ ), d'où :

$$\frac{k}{mw_y(1+\gamma)} = 1 \quad (2 - 56)$$

ce qui permet de simplifier la relation (2 - 55) :

$$v(a) = \frac{(1+\gamma a)^{\frac{m+1}{2}}}{(1-a)^{\frac{m-1}{2}}} \text{ sur } [0, b] \quad (2 - 57)$$

La primitive  $\tilde{S}$  du facteur de souplesse  $S$  peut alors être exprimée moyennant le changement de variable suivant, obtenu en dérivant (2 - 57) par rapport à  $a$  :

$$\forall v_0 > 1, \quad \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1) = \int_1^{v_0} \frac{dv}{R(a(v))} = \int_0^{a_0} \frac{v'(a)}{A(a)} da \quad (2 - 58)$$

$$\text{où } \frac{v'(a)}{A(a)} = \frac{1}{2} \left( \gamma(m+1) \left( \frac{1+\gamma a}{1-a} \right)^{\frac{3m-1}{2}} + (m-1) \left( \frac{1+\gamma a}{1-a} \right)^{\frac{3m+1}{2}} \right) \quad (2 - 59)$$

Notons que la relation (2 - 58) conduit à paramétrer le chargement par le niveau d'endommagement  $a_0$  : la contrainte  $\tau(v_0)$  est alors obtenue par (2 - 46) et (2 - 58) ce qui détermine complètement le second membre du système différentiel (2 - 53), et la relation déformation régularisée – endommagement (2 - 57) en donne la condition initiale  $(v_0 \ 0)^T$ . Il reste alors à déterminer analytiquement une primitive de l'expression (2 - 59), ce qui est possible lorsque les exposants  $\frac{3m-1}{2}$  et  $\frac{3m+1}{2}$  sont de la forme  $p$  ou  $\frac{p}{2}$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . On peut donc exhiber des solutions pour la suite de valeurs du paramètre  $m$  :

$$m = \frac{q}{3}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q \geq 3 \quad (2 - 60)$$

Les expressions de ces primitives sont relativement longues et peuvent être obtenues avec n'importe quel logiciel de calcul formel, c'est pourquoi elles ne seront pas explicitées ici.

### 2.3.7 Influence des paramètres du facteur rigidité

La loi de comportement étant maintenant totalement caractérisée, on étudie dans quelle mesure le choix du facteur de rigidité fait ci-dessus (2 - 54) permet d'assurer le caractère croissant de la bande de localisation, condition sans laquelle la méthode de résolution n'est pas valide. Dans [Lorentz et Godard, 2011], cette propriété est observée dans le cas de la formulation à gradient d'endommagement pour des valeurs de l'exposant  $m \geq 2$ , avec une condition supplémentaire sur le paramètre d'écrouissage  $\gamma$  : pour  $m = 2$  et  $m = 3$ , on doit respectivement avoir  $\gamma \geq 2.8$  et  $\gamma \geq 1.5$ . Nous allons évaluer dans ce paragraphe la plage de valeurs des paramètres  $m$  et  $\gamma$  sur laquelle on peut retrouver cette propriété avec la formulation à gradient implicite, sachant que la longueur interne  $\ell$  paramétrant l'opérateur de régularisation est sans influence sur cette propriété d'après le changement de variable qui a été fait en (2 - 27). Tout d'abord, nous conservons pour les deux formulations la valeur des paramètres matériaux définissant le domaine d'élasticité initial, donnés précédemment dans le Tableau 2 - 1 :

$$E = 3.10^4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 3 \text{ MPa}$$

**Tableau 2 - 2**

*Valeurs des paramètres matériaux communs aux deux modèles :  
gradient d'endommagement et gradient implicite.*

Ces paramètres étant fixés, on donne alors à  $m$  les valeurs suivantes, d'après (2 - 60) :  $m = 1, 4/3, 5/3, 2, 7/3, 8/3, 3$ . On choisit ensuite des valeurs de  $\gamma$  de l'ordre de grandeur de celles qui ont été choisies pour le modèle à gradient d'endommagement :  $\gamma = 1, 5, 10$ . Les valeurs correspondantes du seuil  $k$  de la fonction de charge  $f$  (2 - 7) sont alors obtenues avec (2 - 56) :

$$k = mw_y (1 + \gamma) \quad (2 - 61)$$

Enfin, la valeur de la longueur interne  $\ell$  est quant à elle choisie de telle sorte que les largeurs de bande endommagée  $2D$  relevées (cette fois ci en abscisses réelles et non adimensionnelles) restent du même ordre de grandeur qu'avec la formulation à gradient d'endommagement dans le cas des paramètres matériaux du Tableau 2 - 1 (soit une demi largeur  $D = 50 \text{ mm}$ ), ce qui peut être obtenu avec  $\ell = 10 \text{ mm}$  (voir Figure 2 - 7 (a) (c) (e)).

Les résultats obtenus avec ces 21 combinaisons de paramètres matériaux sont présentés à la Figure 2 - 7, où sont tracées les courbes d'évolution de la (demi) largeur de bande  $b$  en fonction du niveau de chargement  $a_0$ , ainsi que les réponses contrainte – déplacement. Il apparaît déjà que la propriété de croissance de  $b(a_0)$  est soumise à une condition sur  $\gamma$ , puisqu'on observe par exemple pour  $\gamma = 1$  que la plupart de ces profils sont décroissants, et à mesure que  $\gamma$  augmente seuls les profils  $b(a_0)$  qui correspondent à des valeurs de  $m < 2$  le restent. Dans ce cas les solutions calculées avec la méthode proposée ne sont pas valides puisque cela signifierait que des zones qui s'endommagent en début du calcul recouvrent leur état initialement sain, violant ainsi la condition d'irréversibilité. Cela se traduit sur les courbes contrainte – déplacement par une contrainte qui ne converge pas vers 0 à rupture, ce qui est flagrant pour  $m = 1$  (courbes noires) quelque soit la valeur de  $\gamma$ . Ensuite, pour les couples  $(m, \gamma)$  assurant une largeur de bande croissante, il apparaît que plus  $m$  et  $\gamma$  augmentent, plus  $b(a_0)$  croît vite au voisinage de  $a_0 = 1$ , ce qui se traduit par des réponses globales dont le caractère asymptotique est de plus en plus accentué et donc difficilement représentatif de la rupture d'un matériau fragile. Notons que contrairement à ce qui avait été observé pour  $m = 2$  avec la formulation à gradient d'endommagement, la rupture du barreau n'intervient pas ici pour un déplacement imposé fini.

Enfin, les oscillations suivies de chutes brutales observées dans les courbes  $b(a_0)$  au voisinage de  $a_0 = 1$  (pour  $\gamma = 5, 10$  et  $m > 2$ ) sont d'origine purement numérique. En effet les expressions intervenant dans l'évaluation du second membre du système (2 - 53) y deviennent de plus en plus singulières lorsque les valeurs de  $m$  et  $\gamma$  augmentent : aussi le pas d'espace utilisé pour mettre en œuvre le schéma de RK4 doit être extrêmement fin puisque l'erreur accumulée à chaque pas est d'autant plus accentuée que ces expressions sont singulières. Ce jeu de paramètres conduisant de toute manière à un élargissement bien trop important de la bande d'endommagement, nous conserverons désormais la valeur  $m = 2$  pour l'exposant du facteur de rigidité  $A(a)$ , et nous étudierons plus en détail les solutions obtenues dans ce cas au paragraphe 2.4.



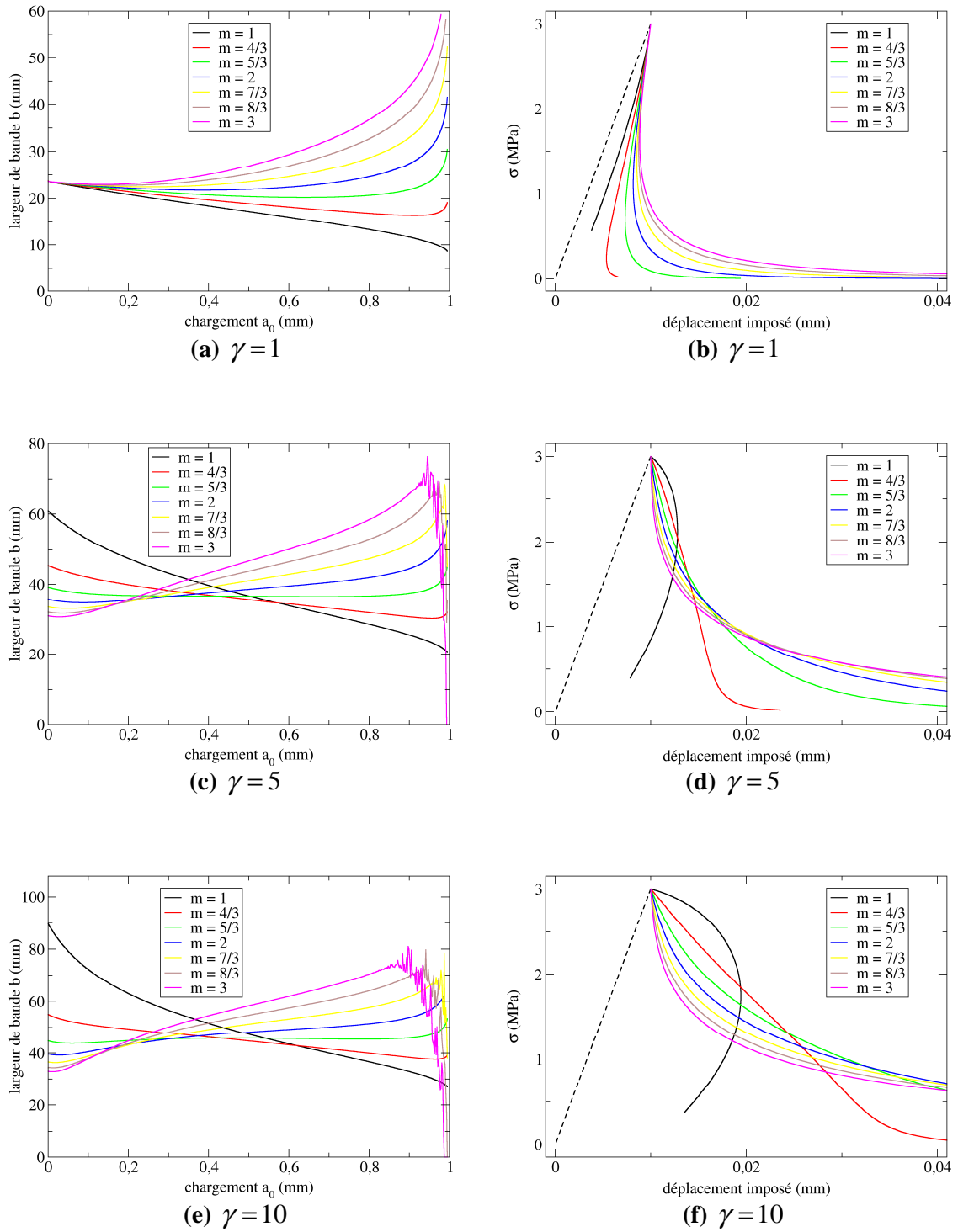


Figure 2 - 7

(a), (c), et (e) : évolution de la demi largeur de bande  $b$  en fonction du chargement;  
 (b), (d), et (f) : réponses globales contrainte – déplacement.

### 2.3.8 Récapitulatif de la méthode de résolution

On récapitule ici les étapes importantes de la méthode de résolution adoptée dans le cas d'une délocalisation de la déformation par une formulation à gradient implicite. Le problème d'évolution est décrit par une équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre 2 en espace dont l'inconnue est la déformation régularisée, et dont le second membre est paramétré par la contrainte normalisée  $\tau(v_0)$ , fonction du niveau de déformation régularisée  $v_0$  atteint au centre de la bande de localisation (ou de manière équivalente du niveau d'endommagement  $a_0$ ) :

$$v - v'' = \tau(v_0)S(v) \quad (2 - 62)$$

Cette EDO est linéaire dans la partie saine de la barre et son intégration y est immédiate ; elle est en revanche non linéaire dans la partie où l'endommagement se développe. On montre en écrivant une intégrale première de (2 - 62) que l'expression de la contrainte normalisée intervenant dans le second membre s'écrit :

$$\tau(v_0) = \left(1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1)\right) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{1 + \tilde{S}(v_0) - \tilde{S}(1)}\right)^2}\right) \quad (2 - 63)$$

où  $\tilde{S}$  est une primitive du facteur de souplesse. En faisant le choix d'un facteur de rigidité  $A(a)$  de la forme :

$$A(a) = \left(\frac{1-a}{1+\gamma a}\right)^m, \quad m \geq 1, \quad \gamma > 0 \quad (2 - 64)$$

on montre qu'on ne peut déterminer analytiquement une primitive du facteur de souplesse (exprimé comme une fonction de la déformation régularisée) que pour une certaine suite de valeurs de l'exposant  $m$  intervenant dans (2 - 64). La contrainte normalisée ne peut alors être obtenue analytiquement que pour :

$$m = \frac{q}{3}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q \geq 3 \quad (2 - 65)$$

Ne disposant pas de solution analytique de l'EDO (2 - 62) dans la partie non linéaire, on met en œuvre un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4 (RK4) pour en approcher la solution inhomogène. Il est alors nécessaire de ramener (2 - 62) à une EDO d'ordre 1 (le schéma de RK4 étant construit pour traiter que ce type d'équation), ce qui est possible en partant de l'écriture de son intégrale première. On aboutit à une équation à variable séparable admettant au moins deux solutions dont la fonction constante  $x \mapsto v_0$ , qui se trouve être la seule que le schéma de RK4 permet d'approcher. On montre cependant qu'en ramenant (2 - 62) au système différentiel d'ordre 1 (2 - 66) d'inconnue  $(v, v')$ , il est alors possible d'approcher avec ce schéma la solution inhomogène correspondant à une localisation de l'endommagement au centre de la barre.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = v' \\ \frac{dv'}{dx} = v - \tau(v_0)S(v) \end{cases}, \text{ avec la CI } \begin{cases} v(0) = v_0 \\ v'(0) = 0 \end{cases} \quad (2 - 66)$$

Enfin, comme la condition d'irréversibilité de l'endommagement n'est pas explicitement prise en compte avec notre méthode de résolution, les solutions obtenues ne sont physiquement admissibles que lorsque la largeur  $2b$  de la bande de localisation est une fonction croissante du niveau chargement  $a_0$ . Une fois les valeurs du module d'Young  $E$  et de la contrainte critique  $\sigma_y$  fixées, on montre que ce caractère croissant peut être obtenu sur une certaine plage de valeurs des paramètres  $m$  et  $\gamma$  intervenant dans l'expression du facteur de rigidité. Le couple  $(m, \gamma)$  fixe alors la valeur du seuil  $k$  de la fonction de charge  $f$  selon la relation :

$$k = \frac{\sigma_y^2}{2E} m (1 + \gamma) \quad (2 - 67)$$

## 2.4 Choix de la formulation non locale

On dispose désormais des solutions correspondant à la régularisation d'une même loi de comportement locale (l'exposant du facteur de rigidité  $A(a)$  étant désormais fixé à  $m = 2$ ) par deux formulations non locales distinctes (à gradient d'endommagement et à déformation régularisée par gradient implicite). On souhaite comparer dans ce paragraphe les réponses du barreau obtenues avec chacune de ces formulations afin de sélectionner celle que nous retiendrons par la suite pour mettre en œuvre le passage continu – discontinu.

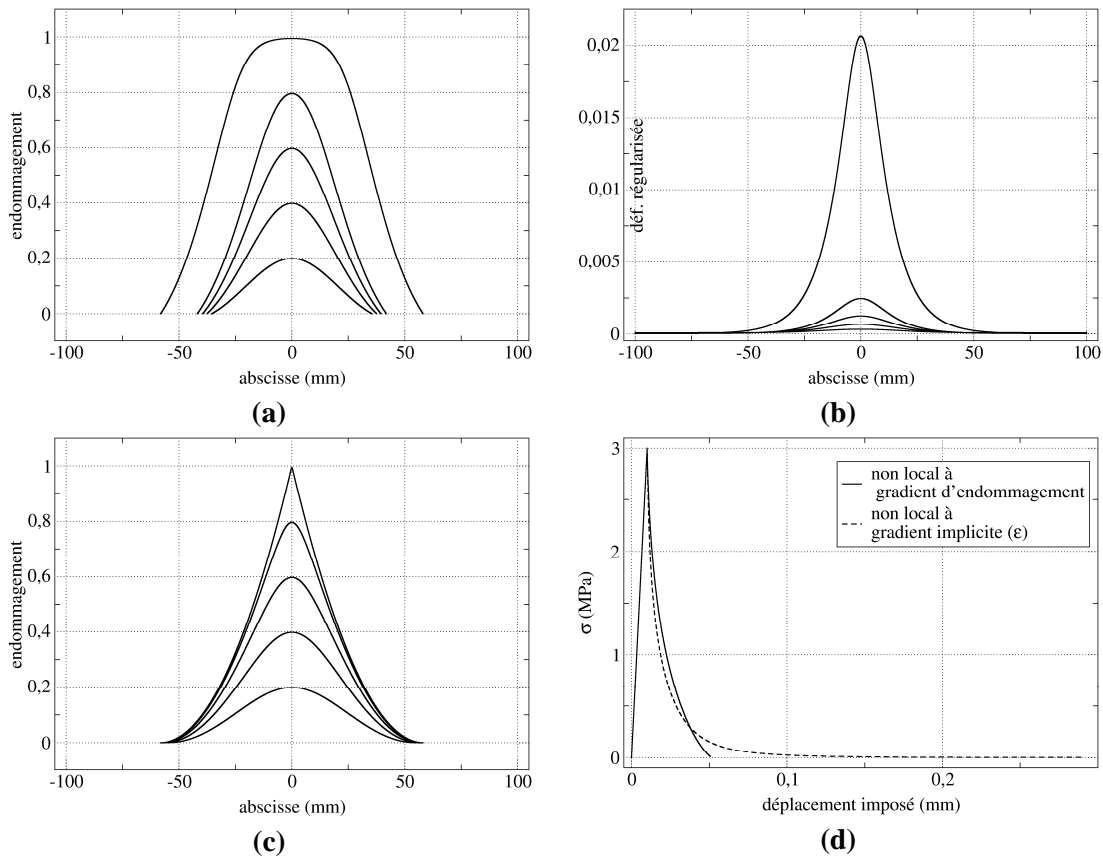
Afin d'établir cette comparaison, les valeurs des paramètres matériaux doivent être choisies de telle sorte que celles des paramètres physiques soient identiques avec chaque formulation, et jusqu'à présent, seules les valeurs des paramètres  $E$  et  $\sigma_y$  étaient conservées d'une formulation à l'autre (Tableau 2 - 2). Si les paramètres internes de la relation de comportement non locale sont, dans le cas de la formulation à gradient d'endommagement, clairement définis à partir de paramètres physiques observables (voir relations (2 - 20)), nous ne disposons pas de telles relations pour la formulation à gradient implicite.

paramètres physiques observables	paramètres internes (formulation à gradient d'endommagement)	paramètres internes (formulation à gradient implicite)
$E = 3.10^4 \text{ MPa}$ $\sigma_y = 3 \text{ MPa}$ $G_f = 9.32 \cdot 10^{-2} \text{ N/mm}$ $2D = 116 \text{ mm}$	$k = 1.20 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$ $\gamma = 3.02$ $c = 2.03 \text{ N}$	$k = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$ $\gamma = 5$ $\ell = 10 \text{ mm}$

**Tableau 2 - 3**

*Paramètres physiques observables et correspondance avec les paramètres internes pour chacune des formulations non locales.*

Cependant, ces paramètres physiques peuvent être calculés numériquement pour cette dernière à partir d'un choix arbitraire du paramètre interne restant  $\gamma$ : en première approximation la largeur  $2D$  de la bande de localisation à rupture peut être relevée pour un niveau de chargement  $a_0^{\max}$  très proche de 1 (ne pouvant atteindre  $a_0 = 1$  avec la méthode de résolution proposée), et l'énergie de rupture  $G_f$  peut alors être calculée comme deux fois l'aire sous la courbe contrainte – déplacement jusqu'à ce même niveau de chargement. En choisissant par exemple  $\gamma = 5$  et  $a_0^{\max} = 0.995$ , cela conduit à une largeur de bande à rupture de  $2D = 116$  mm et à une énergie de rupture  $G_f = 9.32 \cdot 10^{-3}$  N/mm, les valeurs correspondantes des paramètres internes sont détaillées pour chaque formulation au Tableau 2 - 3 (notons que ces valeurs restent très proches de celles qui avaient été précédemment choisies au Tableau 2 - 1 pour représenter le comportement du béton en traction), et les résultats tracés à la Figure 2 - 8.



**Figure 2 - 8**

- (a) profils d'endommagement pour la formulation à gradient implicite ;
- (b) profils de déformation régularisée pour la formulation à gradient implicite ;
- (c) profils d'endommagement pour la formulation à gradient d'endommagement ;
- (d) courbes force – déplacement obtenues avec chacune des formulations.

On peut constater graphiquement à la figure (d) que l'approximation d'une rupture intervenant à  $a_0^{\max} = 0.995$  n'a quasiment pas d'incidence sur le calcul de  $G_f$ , puisque la courbe contrainte – déplacement (traits pointillés) est asymptotique et que la contrainte est déjà quasiment nulle pour ce niveau de chargement : ainsi l'incrément d'énergie à dissiper pour atteindre un  $a_0^{\max}$  plus élevé devient donc négligeable. En revanche, cette approximation n'est pas sans conséquence sur la taille  $2D$  observée de la zone endommagée à rupture, puisque comme on a pu le montrer au paragraphe précédent,  $b(a_0)$  ne cesse de croître lorsque  $a_0 \rightarrow 1$ . Ainsi la comparaison des profils

d'endommagement doit être faite en ajustant le paramètre  $D$  pour la formulation à gradient d'endommagement à partir de la taille relevée  $b(a_0^{\max})$  pour la formulation à gradient implicite. Sur les figures (a) et (c) sont tracés des profils d'endommagement obtenus avec les deux formulations et correspondants à cinq valeurs de  $a_0$  équiréparties entre 0 et  $a_0^{\max}$ . Il apparaît clairement qu'en plus d'entraîner un élargissement de la bande d'endommagement lorsque  $a_0 \rightarrow 1$ , la formulation à gradient implicite conduit à un profil d'endommagement à rupture dont le sommet est aplati (figure (a)). Ces problèmes inhérents à la technique de régularisation peuvent être expliqués de la manière suivante : les points matériels qui voient un endommagement très proche de 1 sont le lieu de déformations locales très élevées, ces dernières viennent alors parasiter le calcul de la déformation régularisée aux points voisins, ce qui est illustré à la figure (b) où sont tracés les profils de déformation régularisée correspondants aux profils d'endommagement de la figure (a). On s'aperçoit que l'écart observable entre les deux derniers profils de déformation régularisée reste très important même lorsque l'on s'éloigne du centre de la barre, or comme c'est uniquement cette déformation régularisée qui intervient dans la fonction de charge pilotant l'évolution de l'endommagement, ce dernier se développe alors de manière irréaliste dans les zones où la déformation locale reste pourtant faible. En revanche, on observe à la figure (c) que la formulation à gradient d'endommagement conduit à des profils d'endommagement dont la largeur évolue beaucoup moins entre les premier et dernier instants de chargement. Comme cette dernière reste croissante, l'endommagement continue forcément à se développer loin du centre de la bande de telle sorte que la zone endommagée se propage. Cependant, on observe clairement que plus le niveau de chargement devient élevé, plus la zone voyant des forts taux d'endommagement tend à se concentrer au niveau du centre de la bande, ce qui aboutit à rupture au profil pointu observé pour  $a_0^{\max}$ . Celui-ci paraît donc bien plus approprié à la description de l'apparition d'une fissure lorsque l'endommagement est total : le matériau est rompu en un point (en dimension un) et non le long d'un plateau comme cela a été observé à la figure (a). Enfin, en termes de réponse globale, la comparaison établie à la figure (d) joue plus en faveur de la méthode de régularisation à gradient de variable interne pour la loi de comportement locale sélectionnée puisque la rupture du barreau (caractérisée par une contrainte nulle) intervient dans ce cas pour un déplacement imposé fini de faible amplitude relativement à celui qui est atteint pour le même niveau de chargement  $a_0^{\max}$  dans le cas de la formulation à déformation régularisée : en effet, dans le premier cas ce déplacement correspond à environ cinq fois la valeur du déplacement  $U_y$  atteint à la fin de la branche élastique, et à presque trente fois dans le second cas. La formulation en gradient d'endommagement semble donc plus adaptée à la description de la rupture d'un matériau fragile.

L'approche mixte continue – discontinue que nous souhaitons mettre en place doit permettre, au moins dans le cadre de ce problème unidimensionnel, de reproduire exactement la réponse du modèle d'endommagement continu régularisé, qui constitue alors le modèle de référence. Or on a vu que la technique de régularisation employée conduisait, pour un même jeu de paramètres physiques, à des comportements différents, qu'il s'agisse de la description locale des champs mécaniques ou de la réponse globale. Comme la loi de comportement issue de la régularisation à gradient de variable interne semble déjà permettre à elle seule de modéliser d'une façon convenable la rupture d'un matériau quasi-fragile, il paraît donc légitime de chercher à reproduire exactement son comportement avec des lois d'interfaces. Dans le cas où l'on choisirait un modèle de référence régularisé par gradient implicite, il paraîtrait alors plus judicieux de chercher à palier les inconvénients de cette formulation par l'introduction des zones cohésives : tout en préservant l'énergie de rupture, la loi d'interface pourrait être construite afin de limiter le caractère asymptotique de la réponse globale. Si la contrainte critique et l'énergie de rupture d'une telle loi

sont déterminées par le niveau de chargement  $a_0$  à partir duquel on bascule vers le modèle cohésif, la forme de la loi reste, elle, indéterminée. Nous ne retiendrons donc par la suite que la méthode de régularisation à gradient de variable interne.

---

## 2.5 Passage du modèle continu au modèle discontinu

Disposant de la réponse décrivant la rupture du barreau avec un modèle d’endommagement continu, on souhaite désormais construire une équivalence entre le modèle continu et un modèle discontinu de type CZM, afin de pouvoir basculer d’une configuration où l’endommagement reste volumique dans le barreau vers une concentration de ce mécanisme dissipatif au niveau d’une interface cohésive (dans notre configuration unidimensionnelle, une telle interface se réduit à un point), tout en préservant l’équivalence énergétique entre les deux modèles (un même incrément de chargement conduit au même incrément d’énergie dissipée).

On peut trouver des approches semblables dans plusieurs travaux, citons par exemple [Cazes *et al.*, 2009] et [Cazes *et al.*, 2010] où le problème 1D est décrit dans la première contribution par un modèle fragile à gradient implicite, puis dans la seconde en couplant ce modèle non local à un comportement plastique. La construction d’une loi cohésive équivalente est réalisée en assurant les mêmes incréments d’énergie dissipée pour le modèle continu et le modèle cohésif, et cette construction s’appuie sur la résolution du problème continu par la méthode des éléments finis. Dans [Comi *et al.*, 2007] une loi cohésive permettant d’effectuer le passage continu/discontinu dans une configuration déjà endommagée est construite sur la base d’un problème 1D. L’auteur souligne cependant que l’énergie restant à dissiper par le modèle d’interface est surestimée par rapport à celle qui reste effectivement à dissiper par le modèle continu, car il est supposé dans ce cas que si l’on considère uniquement le modèle continu après l’instant où la transition a été déclenchée, la largeur de la bande d’endommagement reste constante. De plus, la forme de cette loi cohésive est choisie *a priori* comme celle de la relation contrainte-déformation uniaxiale du modèle continu, avec des paramètres à ajuster de telle sorte que l’énergie de rupture dont on munit l’interface soit préservée, ainsi que la contrainte sur l’interface au moment où la transition est déclenchée. Dans [Lorentz *et al.*, 2011], la convergence du modèle à gradient d’endommagement vers un modèle cohésif a été étudiée sur le même problème 1D : en fixant tous les paramètres macroscopiques du modèle continu et en faisant tendre vers 0 le paramètre  $D$  contrôlant la longueur caractéristique, il est démontré que le modèle résultant est de type cohésif. De plus, l’expression de cette loi cohésive est donnée en fonction des paramètres non locaux.

### 2.5.1 Identification d’une loi d’interface équivalente

Considérons la barre étudiée précédemment, mais supposons la désormais constituée d’un matériau élastique linéaire, et supposons de plus qu’une discontinuité du champ de déplacement peut apparaître au centre de la bande d’endommagement observée lorsque le matériau était volumiquement endommageable (c’est-à-dire au centre de la barre dans notre cas). L’élasticité de la barre est caractérisée par le module d’Young sain  $E$  de l’approche continue, et la discontinuité du champ de déplacement par son saut  $\delta = \llbracket u \rrbracket_{x=0}$  à l’interface ponctuelle  $x = 0$ . On souhaite ici

construire une loi d'interface  $\sigma(\delta)$  énergétiquement équivalente au modèle non local (voir Figure 2 - 9), ce qui, du fait du caractère unidimensionnel de notre problème, revient à construire le modèle cohésif de telle sorte qu'il fournisse exactement la même réponse globale contrainte – déplacement que le modèle continu.

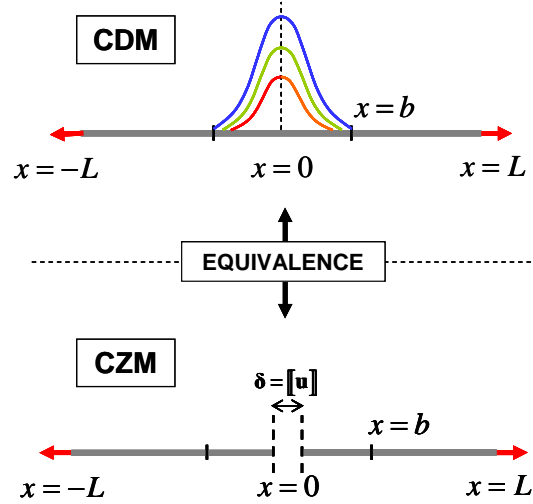


Figure 2 - 9

Barre unidimensionnelle : équivalence entre le modèle non local et le modèle cohésif.

On note  $U^{\text{CDM}}$  et  $U^{\text{CZM}}$  l'amplitude des déplacements respectivement imposés au barreau pour le modèle non local et pour le modèle cohésif, avec  $\varepsilon^{\text{CDM}}$  et  $\varepsilon^{\text{CZM}}$  les champs de déformation correspondants. On a alors les relations suivantes :

$$U^{\text{CDM}} = \int_0^L \varepsilon^{\text{CDM}} dx = \frac{\sigma}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(a(x))} \quad (2 - 68)$$

$$U^{\text{CZM}} - \frac{\delta}{2} = \int_0^L \varepsilon^{\text{CZM}} dx = \frac{\sigma}{E} L$$

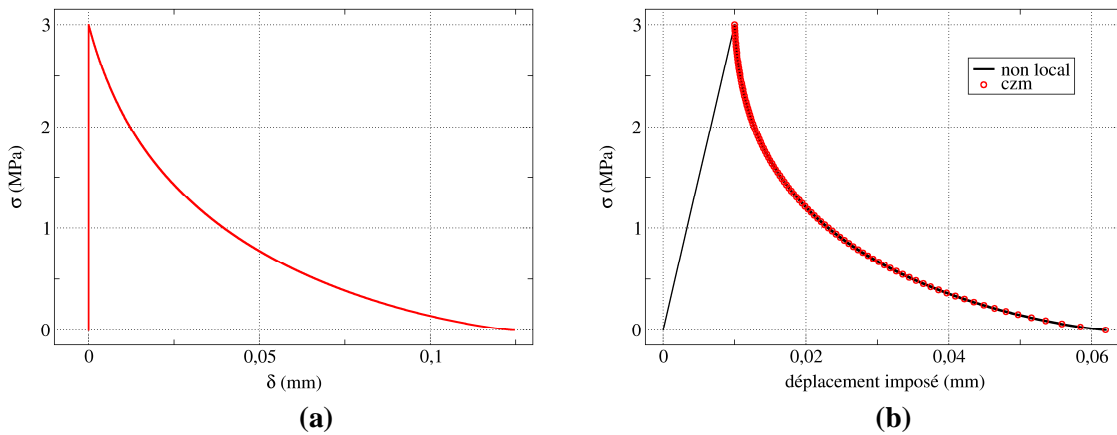
En paramétrant le niveau de chargement par la contrainte  $\sigma$  (homogène dans la barre) en régime dissipatif ( $\sigma$  décroît de  $\sigma_y$  à 0), l'équivalence énergétique est obtenue en imposant l'égalité des déplacements imposés pour chaque approche à un même niveau de contrainte  $\sigma$  :

$$\forall \sigma, U^{\text{CDM}} = U^{\text{CZM}} \Rightarrow \delta(\sigma) = \frac{2\sigma}{E} \left( \int_0^L \frac{dx}{A(a(x))} - L \right) \quad (2 - 69)$$

L'intégrale (2 - 69) se simplifie dans la zone  $[b, L]$  où le comportement reste élastique pour l'approche continue, ce qui permet d'exprimer le saut de déplacement équivalent  $\delta^{\text{EQU}}(\sigma)$  :

$$\delta^{\text{EQU}}(\sigma) = \frac{2\sigma}{E} \left( \int_0^b \frac{dx}{A(a(x))} - b \right) \quad (2 - 70)$$

où  $b$  désigne la (demi) taille de la bande de localisation sous le chargement  $\sigma$ . Il est alors possible de calculer la loi cohésive équivalente puisque le champ d'endommagement  $a(x)$  ainsi que la taille de la bande de localisation  $2b$  sous le chargement  $\sigma$  sont déterminés par la solution de référence présentée ci-dessus. Comme l'étude précédente était de nature semi-analytique, ces grandeurs sont connues numériquement, on calcule donc l'intégrale (2 - 70) par une méthode d'intégration numérique (méthode des trapèzes) pour chaque valeur de  $\sigma \in [0, \sigma_y]$ . La Figure 2 - 10 (a) représente la loi cohésive obtenue par identification au modèle non local à gradient d'endommagement avec les paramètres matériau fixés au Tableau 2 - 1 et pour un intervalle  $[0, \sigma_y]$  échantillonné avec 1000 points. La Figure 2 - 10 (b) illustre la comparaison des réponses globales de chaque approche qui sont (par construction) effectivement superposées. On peut noter que l'importance attachée à la précision des schémas numériques utilisés lors de la résolution du problème continu se justifie également à ce stade de l'étude, puisque le calcul de la loi équivalente (2 - 70) nécessite une étape supplémentaire d'intégration numérique.



**Figure 2 - 10**

*Barre unidimensionnelle en traction : (a) loi cohésive équivalente ; (b) superposition des réponses globales contrainte – déplacement imposé obtenues indépendamment avec chaque modèle.*

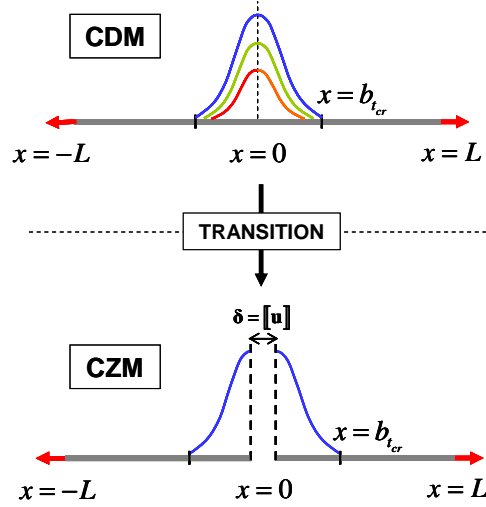
On s'assure que la loi d'interface ainsi obtenue préserve bien la contrainte critique  $\sigma_y$  et l'énergie de rupture  $G_f$  du modèle non local (pour  $G_f$  on s'en assure en calculant l'aire sous la courbe tracée à la Figure 2 - 10 (a)). Une loi cohésive étant caractérisée par sa contrainte critique, son énergie de rupture, et sa forme (affine, exponentielle...), l'identification présentée ci-dessus permet de déterminer ce dernier paramètre qui ne pouvait être obtenu directement à partir du modèle non local.

## 2.5.2 Passage du modèle non local au modèle cohésif

Disposant d'une loi cohésive équivalente au modèle non local, on souhaite désormais développer la stratégie suivante : décrire dans un premier temps la dégradation du matériau par la seule approche continue, et basculer à partir d'un certain niveau de chargement  $a_0$  « critique » (pour l'instant arbitraire) vers une représentation discontinue en insérant une interface cohésive au centre de la bande de localisation tout en préservant la distribution de rigidité dégradée due à cette phase



d'endommagement volumique (voir Figure 2 - 11). On note alors  $\sigma_{cr}$ ,  $a_{cr}$ , et  $b_{cr}$  respectivement la contrainte, le champ d'endommagement et la demi largeur de bande sous ce chargement  $a_{cr}(0)$ .



**Figure 2 - 11**

*Barre unidimensionnelle : passage du modèle non local vers le modèle cohésif à un niveau de chargement arbitraire.*

Il est important de souligner les points suivants :

- sous la contrainte critique  $\sigma_{cr}$  le saut de déplacement  $\delta(\sigma)$  doit être nul afin de préserver l'équilibre lors du changement de modèle :

$$\delta(\sigma_{cr}) = 0 \quad (2 - 71)$$

- une fois que cette transition a été déclenchée, on impose que le mécanisme dissipatif soit uniquement pris en compte par l'interface cohésive introduite, le champ d'endommagement  $a$  ne doit donc plus évoluer :

$$\forall t \geq t_{cr}, \forall x \in \Omega, \dot{a}(x) = 0 \quad (2 - 72)$$

où  $t_{cr}$  désigne l'instant où l'on bascule vers le modèle cohésif.

On conserve la notation  $U^{CDM}$  pour le déplacement imposé à l'instant  $t$  dans la description continue, et on introduit  $U^{TRA}$  le déplacement imposé à l'instant  $t > t_{cr}$  pour l'approche qui consiste à déclencher la transition au cours du régime de localisation. Ces quantités s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall t > t_{cr}, U^{CDM} &= \frac{\sigma}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(a(x))} \\ \forall t > t_{cr}, U^{TRA} - \frac{\delta^{TRA}}{2} &= \frac{\sigma}{E} \int_0^L \frac{dx}{A(a_{cr}(x))} \end{aligned} \quad (2 - 73)$$

où  $\delta^{\text{TRA}}$  désigne le saut de déplacement après la transition. Afin d'assurer l'équivalence énergétique, on impose comme dans l'équation (2 - 69) l'égalité entre ces deux déplacements pour un même état de contrainte  $\sigma$ . On peut, de la même manière en déduire l'expression du saut de déplacement en fonction de la contrainte :

$$\forall t > t_{cr}, U^{\text{CDM}} = U^{\text{TRA}} \Rightarrow \delta^{\text{TRA}}(\sigma) = \frac{2\sigma}{E} \int_0^L \left( \frac{1}{A(a(x))} - \frac{1}{A(a_{cr}(x))} \right) dx \quad (2 - 74)$$

cette relation peut encore s'écrire :

$$\delta^{\text{TRA}}(\sigma) = \frac{2\sigma}{E} \int_0^L \left( \frac{1}{A(a(x))} - 1 \right) dx + \frac{2\sigma}{E} \int_0^L \left( 1 - \frac{1}{A(a_{cr}(x))} \right) dx \quad (2 - 75)$$

On peut alors simplifier les deux termes dans l'équation (2 - 75) puisque le champ d'endommagement reste nul dans les parties élastiques  $[b, L]$  et  $[b_{cr}, L]$  :

$$\delta^{\text{TRA}}(\sigma) = \frac{2\sigma}{E} \int_0^b \left( \frac{1}{A(a(x))} - 1 \right) dx - \frac{2\sigma}{E} \int_0^{b_{cr}} \left( \frac{1}{A(a_{cr}(x))} - 1 \right) dx \quad (2 - 76)$$

Ainsi, le saut de déplacement  $\delta^{\text{TRA}}$  s'exprime comme la différence de deux termes positifs :

- le premier n'est autre que le saut de déplacement  $\delta^{\text{EQU}}$  de la loi d'interface équivalente identifiée au paragraphe 2.5.1 :

$$\forall t > t_{cr}, \delta^{\text{EQU}}(\sigma) = \frac{2\sigma}{E} \int_0^b \left( \frac{1}{A(a(x))} - 1 \right) dx \quad (2 - 77)$$

- le second est un terme correctif que l'on notera  $\delta_{cr}^{\text{COR}}$ , qui dépend linéairement de la contrainte et dont la dépendance au champ d'endommagement critique est soulignée par son indice :

$$\forall t > t_{cr}, \delta_{cr}^{\text{COR}}(\sigma) = \frac{2\sigma}{E} \int_0^{b_{cr}} \left( \frac{1}{A(a_{cr}(x))} - 1 \right) dx \quad (2 - 78)$$

d'où la relation :

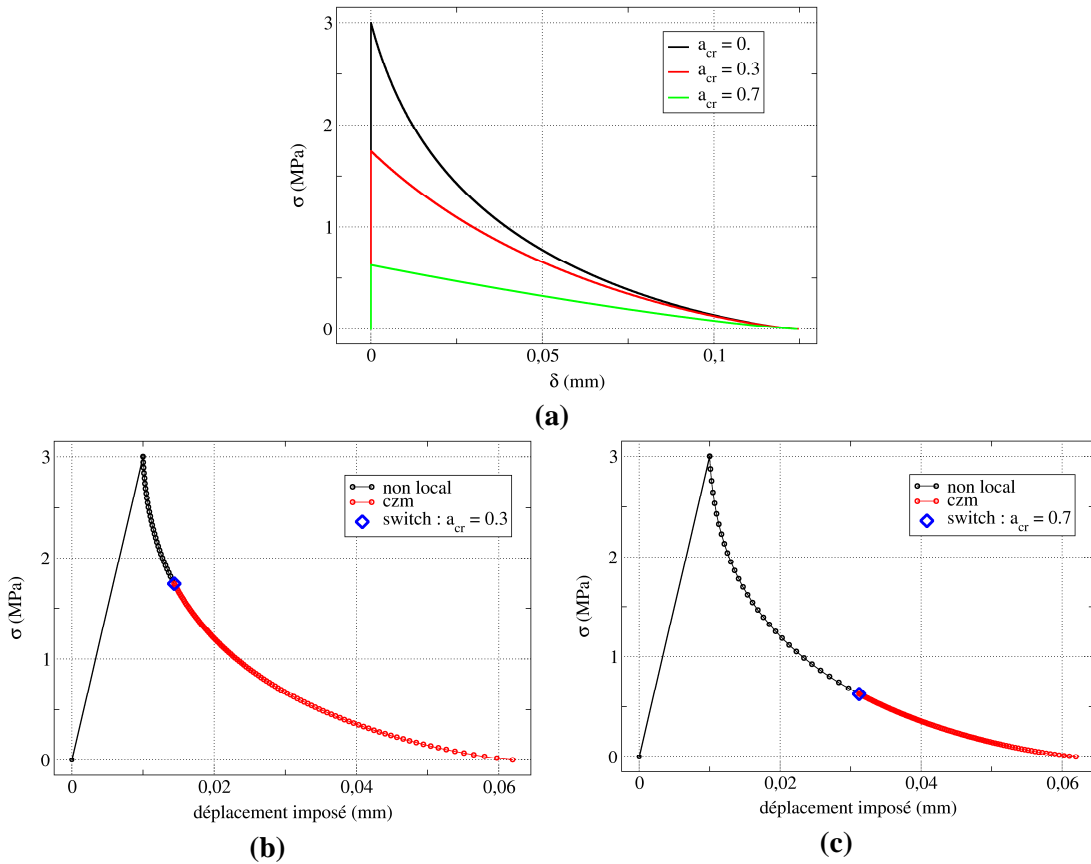
$$\forall t > t_{cr}, \delta_{cr}^{\text{TRA}}(\sigma) = \delta^{\text{EQU}}(\sigma) - \delta_{cr}^{\text{COR}}(\sigma) \quad (2 - 79)$$

La loi cohésive équivalente constitue donc une courbe maîtresse dépendant uniquement du modèle non local (et donc du choix de ses paramètres matériau), à partir de laquelle se déduit, étant donné un état de chargement « critique », la loi permettant d'assurer la transition tout en assurant l'équivalence énergétique avec le modèle de référence. On peut également noter que, comme le

terme correctif  $\delta_{cr}^{COR}$  est nul lorsque la contrainte devient nulle, le saut de déplacement à rupture ne dépend pas du niveau de chargement auquel on déclenche la transition et reste donné par la loi cohésive équivalente :

$$\delta_{cr}^{TRA}(0) = \delta^{EQU}(0) \quad (2 - 80)$$

Afin d'alléger les notations, on utilisera désormais la notation  $a_{cr} = a_{cr}(0)$  pour la valeur du paramètre de chargement critique. À la Figure 2 - 12 (a) sont tracées les lois cohésives obtenues pour des endommagements critiques de  $a_{cr} = 0.3$  (courbe rouge) et  $a_{cr} = 0.7$  (courbe verte), la valeur  $a_{cr} = 0$  (courbe noire) correspond à la loi cohésive équivalente. Les Figure 2 - 12 (b) et (c) présentent les réponses contrainte – déplacement obtenues en résolvant dans un premier temps (par la méthode semi-analytique présentée précédemment) le problème non linéaire continu pour un paramètre de chargement  $a_0$  allant de 0 à  $a_{cr}(0)$ , puis en utilisant dans un second temps la loi cohésive de transition correspondante pour une barre élastique linéaire dont le module d'Young est dégradé par le champ d'endommagement critique, et supportant une discontinuité potentielle du saut de déplacement en  $x = 0$ . Les deux réponses globales étant identiques, cela valide la méthode proposée.



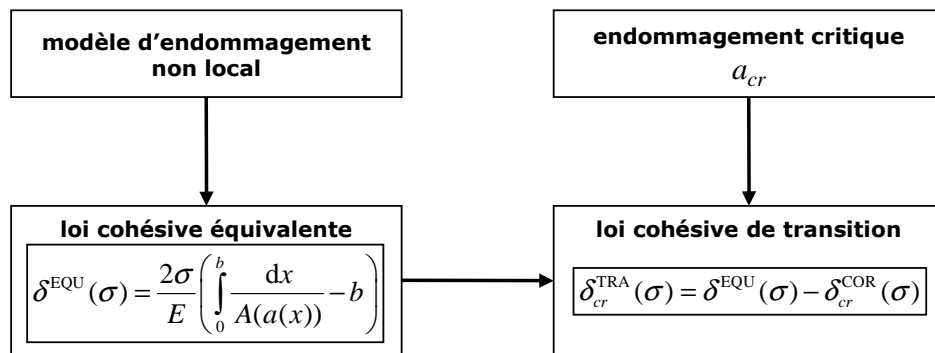
**Figure 2 - 12**

*Barre unidimensionnelle en traction : (a) exemple de deux lois cohésives obtenues pour des endommagements critiques fixés à  $a_{cr} = 0.3$  (courbe rouge) et 0.7 (courbe verte) ; (b,c) réponses globales contrainte – déplacement respectives.*

Enfin, comme on a fait l'hypothèse d'un chargement monotone croissant, le comportement en décharge de la loi cohésive n'a pas été évoqué. Afin de rester cohérent avec le modèle d'endommagement de référence pour lequel la décharge est linéaire, les lois cohésives construites dans cette partie doivent également vérifier cette propriété.

### 2.5.3 Récapitulatif de la méthode d'identification de lois cohésives de transition

On résume ici la manière dont sont construites les lois d'interface permettant de faire la transition entre un modèle d'endommagement non local et un modèle de zones cohésives dans le cadre de ce problème unidimensionnel. Un schéma récapitulatif est donné à la Figure 2 - 13.



**Figure 2 - 13**

*Schéma de principe de la construction d'une loi cohésive de transition.*

On part de la solution analytique du problème décrit uniquement avec le modèle d'endommagement non local (solution de référence), le chargement étant alors paramétré en régime dissipatif par l'état de contrainte dans la barre. Parallèlement à cela, on considère une même barre constituée d'un matériau élastique linéaire, au sein de laquelle est disposée une interface cohésive (ponctuelle) au niveau du point correspondant au centre de la bande de localisation observée sur la barre endommageable. On montre qu'on peut alors identifier une loi cohésive dite équivalente et régissant le comportement de cette interface, de telle sorte que la réponse globale de la barre soit identique à celle obtenue avec le modèle d'endommagement continu. Cette équivalence énergétique est assurée en imposant pour un même niveau de contrainte l'égalité des déplacements imposés en bout de barre pour chacun des deux modèles ; ceci permet d'extraire l'expression du saut de déplacement  $\delta^{\text{EQU}}$  en fonction de la contrainte  $\sigma$ .

L'étape suivante consiste à construire une loi d'interface permettant, étant donné un niveau d'endommagement critique  $a_{cr}$ , de basculer du modèle continu vers le modèle cohésif tout en préservant l'équivalence énergétique (c'est-à-dire en continuant de reproduire la solution de référence). Le comportement volumique du matériau devient alors élastique linéaire dès que l'interface cohésive est activée, mais avec une rigidité dégradée dont la distribution est inhomogène du fait de l'évolution de l'endommagement précédant le changement de modèle. On montre que l'expression du saut  $\delta^{\text{TRA}}$  de cette loi dite de transition se déduit de la loi équivalente *via* un terme

correctif  $\delta^{\text{COR}}$  dépendant du modèle d'endommagement non local et de la valeur de l'endommagement  $a_{cr}$ .

## 3 Extension au cadre éléments finis en dimension deux et trois

Il s'agit dans cette section d'étendre aux dimensions supérieures et dans un cadre éléments finis les résultats obtenus en dimension un lors de l'étude semi-analytique précédente. Plus précisément, on souhaite construire une approche couplée continue – discontinue autorisant la propagation de fissures cohésives dans un milieu non local à gradient d'endommagement, en s'appuyant sur le principe des lois d'interfaces assurant la transition qui a été proposé dans la section précédente. On se restreint aux cas de fissures rectilignes (en dimension deux) ou planes (en dimension trois) se propageant en mode I. Nous ne détaillerons ici que la manière dont cette stratégie a été implémentée en dimension deux, dans la mesure où elle s'applique d'une manière identique en dimension trois comme l'illustrent les résultats qui sont présentés dans la chapitre 3.

### 3.1 Discrétisation spatiale

On présente ici les éléments finis résultant de la discrétisation spatiale des formulations variationnelles semi-discrétisées en temps, présentées au chapitre 1 (§ 1.5.3) pour le modèle non local, et au chapitre 1 (§ 2.2) pour le modèle de zones cohésives. Cette description brève n'a pour but que de donner les éléments de détail utiles à la construction de l'approche couplée, une description complète de ces éléments finis tels qu'ils sont implémentés dans le *Code\_Aster* est donnée respectivement dans les Annexes 1 et 2.

#### 3.1.1 Élément fini mixte non local à gradient d'endommagement

Comme cela a été vu au chapitre 1, dans le cas de la formulation à gradient d'endommagement l'application d'une méthode de décomposition – coordination permet de reformuler le problème de minimisation de l'énergie potentielle d'une structure à la fin d'un pas de temps  $[t^n, t^{n+1}]$ , en la recherche du point-selle du Lagrangien augmenté  $\mathcal{L}_r$  suivant :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}^{n+1}, a^{n+1}, \lambda^{n+1}, \alpha^{n+1}) \text{ réalisant } \min_{\mathbf{u}} \min_a \max_{\lambda} \min_{\alpha} [\mathcal{L}_r(\mathbf{u}, a, \lambda, \alpha)] ; \\ & \text{avec } \mathcal{L}_r(\mathbf{u}, a, \lambda, \alpha) = \int_{\Omega} \left( \Phi^{\text{loc}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + \Psi(\alpha - \alpha^n) \right) d\Omega - W_{\text{ext}}(\mathbf{u}) \\ & \quad + \int_{\Omega} \frac{c}{2} (\nabla a)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda (a - \alpha) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{r}{2} (a - \alpha)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2 - 81)$$

Les champs  $\mathbf{u}$ ,  $a$ , et  $\lambda$  sont discrétisés aux nœuds avec des fonctions de forme polynomiales de Lagrange, tandis que le champ d'endommagement auxiliaire  $\alpha$  est discrétisé en des points de collocation qui coïncident avec les points d'intégrations sur lesquels s'appuie la méthode de quadrature. Ce champ  $\alpha$  est ainsi éliminé de la formulation globale et traité à un niveau local : la

minimisation par rapport à  $\alpha$  dans (2 - 81) revient alors à intégrer une relation de comportement ( $\alpha$  est racine d'une équation scalaire en chaque point de Gauss), ce qui permet d'assurer plus facilement la contrainte  $0 \leq \alpha \leq 1$ , et de condenser au niveau local les fortes non linéarités des termes de (2 - 81) dont ce champ est argument. Lors de l'intégration de la loi de comportement, le tenseur des contraintes et la matrice tangente cohérente sont également calculés aux points de Gauss, la méthode de quadrature permet alors de calculer les contributions élémentaires des vecteurs résidus associés aux variables nodales ( $\mathbf{u}$ ,  $a$ ,  $\lambda$ ) ainsi que celles de la matrice tangente de correction du système non linéaire global. La solution de ce dernier est obtenue par un algorithme de Newton-Raphson classique.

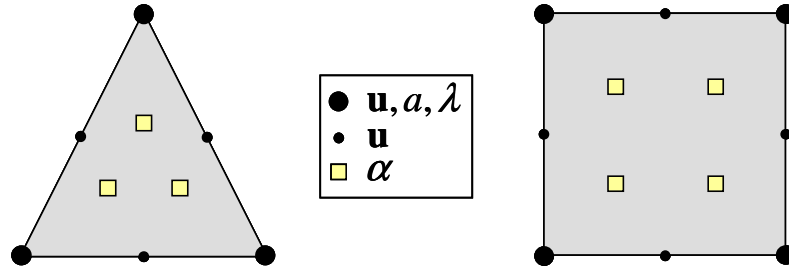


Figure 2 - 14

*Éléments finis mixtes pour la formulation non locale à gradient d'endommagement (dimension deux).*

L'élément fini mixte résultant repose sur le choix des fonctions de formes suivantes : le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est interpolé avec des fonctions P2-continues, les champs d'endommagement nodal  $a$  et de multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  avec des fonctions P1-continues. Le champ d'endommagement auxiliaire  $\alpha$  est quant à lui interpolé avec des fonctions P1-discontinues, ce qui en dimension deux revient à une méthode de collocation sur 3 points pour le triangle, et 4 point pour le quadrangle, qui sont choisis comme les points d'intégration de la méthode de quadrature. Ces éléments sont représentés de manière schématique à la Figure 2 - 14.

### 3.1.2 Élément fini mixte d'interface pour les modèles de zones cohésives

On considère ici une structure  $\Omega$  traversée par une surface  $\Gamma$  de discontinuité potentielle du champ de déplacement, qui représente un trajet de fissuration connu *a priori*. On suppose ici que le massif  $\Omega \setminus \Gamma$  a un comportement élastique linéaire, et que la propagation de la fissure est modélisée par un modèle de zones cohésives. On a vu au chapitre 1, § 2.2, que ce problème d'évolution pouvait être formulé en termes de minimisation d'énergie : à chaque incrément de chargement, le déplacement  $\mathbf{u}$  est déterminé comme un minimum local de l'énergie potentielle  $E(\mathbf{u})$  de la structure. Dans ce cas, cette dernière s'exprime comme la somme de l'énergie de déformation élastique du massif, de l'énergie cohésive surfacique, et du travail des efforts extérieurs, avec  $\kappa$  la variable l'histoire permettant de gérer l'irréversibilité :

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega + \int_{\Gamma} \Pi([\![\mathbf{u}]\!], \kappa) d\Gamma - W_{ext}(\mathbf{u}) \quad (2 - 82)$$

Afin de décrire avec précision le comportement de la fissure cohésive, certains points importants directement liés à la définition de la densité d'énergie de surface  $\Pi$  doivent être vérifiés. Il s'agit principalement du caractère irréversible du mécanisme de fissuration, de la prise en compte du contact le long de  $\Gamma$  afin d'éviter l'interpénétration des lèvres de la fissure, ainsi qu'un seuil en contrainte non nul pour le critère d'amorçage en contrainte. Ce dernier point correspond à une condition d'adhérence initiale parfaite pour la loi d'interface, et exclut le recours à une régularisation de l'énergie de surface. Tout ces points contribuent au caractère non différentiable de  $\Pi$ , et se traduisent donc au niveau de la loi d'interface par un vecteur contrainte s'exprimant comme une fonction multi-valuée du saut de déplacement. De la même manière que pour l'élément non local présenté précédemment, la non-dérivabilité de  $\Pi$  est condensée au niveau local par une méthode de décomposition – coordination :

- un champ auxiliaire  $\delta$  supposé égal au saut de déplacement  $[[\mathbf{u}]]$  à travers  $\Gamma$  est introduit en tant qu'argument de la densité d'énergie de surface ;
- la contrainte d'égalité  $[[\mathbf{u}]] = \delta$  est traitée par dualisation, en introduisant un multiplicateur de Lagrange (vectoriel)  $\mathbf{t}$  ;
- un terme quadratique de pénalisation est ensuite ajouté, sans influence tant que la contrainte d'égalité est respectée.

Cela conduit à reformuler le problème de minimisation comme la recherche du point-selle du Lagrangien augmenté suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \delta) = & \int_{\Omega \setminus \Gamma} \Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega + \int_{\Gamma} \Pi(\delta, \kappa) d\Gamma - W_{ext}(\mathbf{u}) \\ & + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot ([[\mathbf{u}]] - \delta) d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\Gamma} ([[\mathbf{u}]] - \delta)^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (2 - 83)$$

où le multiplicateur de Lagrange  $\mathbf{t}$  correspond aux forces cohésives s'exerçant sur  $\Gamma$ . Le déplacement  $\mathbf{u}$  et les forces cohésives  $\mathbf{t}$  sont discrétisés aux nœuds avec des fonctions de forme classique, et le champ auxiliaire  $\delta$  est quant à lui éliminé de la formulation globale. Il est discrétisé sur  $\Gamma$  en des points de collocation coïncidant avec les points de Gauss  $x_g$ , la minimisation de (2 - 83) par rapport  $\delta$  revient alors à satisfaire la loi de comportement cohésive en ces points :

$$\mathbf{t}(x_g) + r([[\mathbf{u}]](x_g) - \delta(x_g)) \in \partial \Pi(\delta(x_g), \kappa(x_g)) \quad (2 - 84)$$

Le système non linéaire global d'inconnues nodales  $(\mathbf{u}, \mathbf{t})$  est alors résolu par un algorithme de Newton.

Si on suppose le trajet de fissuration connu *a priori*, l'interface  $\Gamma$  peut être discrétisée au moyen de quadrangles dégénérés d'épaisseur nulle, assimilables à des segments. L'élément fini mixte d'interface s'appuyant sur cette maille est représenté à la Figure 2 - 15 ; il repose sur une interpolation P2 – continue du champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , P1 – continue pour le champ de force cohésive  $\mathbf{t}$ , et P1 – discontinue pour le champ auxiliaire  $\delta$ . Ce dernier choix correspond à deux points de collocation pour le segment (quadrangle dégénéré), qui sont choisis coïncidents avec les points de Gauss.

Le massif est quant à lui discrétisé au moyen de mailles triangulaires ou quadrangulaires portant des éléments finis quadratiques classiques. Ce maillage doit alors être conforme à la



discrétisation de l'interface, de telle sorte que les nœuds situés sur les lèvres  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$  de la fissure soient coïncidents.

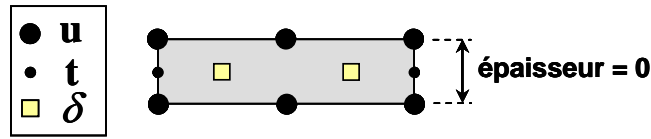


Figure 2 - 15

*Élément fini mixte d'interface pour le modèle de zone cohésive (dimension deux).*

Remarque :

*Par souci de simplicité le modèle cohésif est ici présenté dans le cas où le massif a un comportement élastique linéaire. Toutefois, afin de mettre en œuvre l'approche couplée, le comportement du massif doit être décrit à travers la formulation mixte non locale présentée précédemment, ce qui conduit à un modèle élément fini plus complexe. Certains points devront être examinés avec une attention particulière, notamment la présence des degrés de liberté supplémentaires  $(a, \lambda)$  issus de la formulation non locale sur les nœuds sommets des éléments d'interfaces.*

## 3.2 Algorithme de couplage explicite

### 3.2.1 Hypothèses

Dans le cas où l'on se restreint à des propagations de fissures rectilignes en mode I, les résultats préliminaires obtenus lors de l'étude du barreau en traction peuvent être étendus à un cadre éléments finis en dimension deux moyennant l'hypothèse qu'à la fin de chaque pas de temps convergé, et en tout point du centre de la bande d'endommagement, les champs de contrainte et d'endommagement  $\alpha$  sont identiques le long de la direction normale au trajet de fissuration (au sein de la bande de localisation) à ceux qu'on pouvait observer dans la barre en traction pour un même niveau d'endommagement central  $\alpha_0$ . Il serait alors possible de faire propager une fissure cohésive à mesure que  $\alpha_0 \geq a_{cr}$  (où  $a_{cr}$  désigne une valeur d'endommagement arbitraire), en identifiant la loi d'interface appropriée selon la méthode développée au paragraphe 2.5.2 à partir de la donnée  $\alpha_0$ . Afin d'évaluer dans quelle mesure cette hypothèse est valide, revenons sur l'exemple de la fissuration de l'éprouvette DCB trapézoïdale vu au chapitre 1, § 3.2, dans le cas où le problème est traité uniquement avec le modèle à gradient d'endommagement. Sur la Figure 2 - 16 (a) et (b), la composante  $\sigma_{yy}$  du tenseur des contraintes ainsi que le champ d'endommagement  $\alpha$  sont relevés au sein de la bande selon la même normale (direction  $y$ ) au trajet de fissuration (direction  $x$ ) pour plusieurs pas de chargement successifs, chaque couleur correspondant à un relevé effectué à un même pas de chargement. On constate que les profils d'endommagement transverses relevés sur la figure (b) sont semblables à ceux qui ont été obtenus dans le cas unidimensionnel (voir Figure 2 - 6), et que lorsque le front d'endommagement se situe au niveau du point de relevé  $(x_0, y_0)$  schématisé à la Figure (c), le profil de contrainte est légèrement bombé, mais tend à devenir constant à mesure que le front se propage, ce qui apparaît à partir d'un niveau d'endommagement central supérieur à environ 0.2. Ensuite, les composantes  $\partial_x \alpha$  et  $\partial_y \alpha$  du gradient de l'endommagement (nodal) ont été

relevées en valeur absolue respectivement dans les directions  $x$  et  $y$  aux figures (d) et (e) : la valeur maximale atteinte par la composante  $y$  est environ dix fois supérieure à celle atteinte par la composante  $x$ .

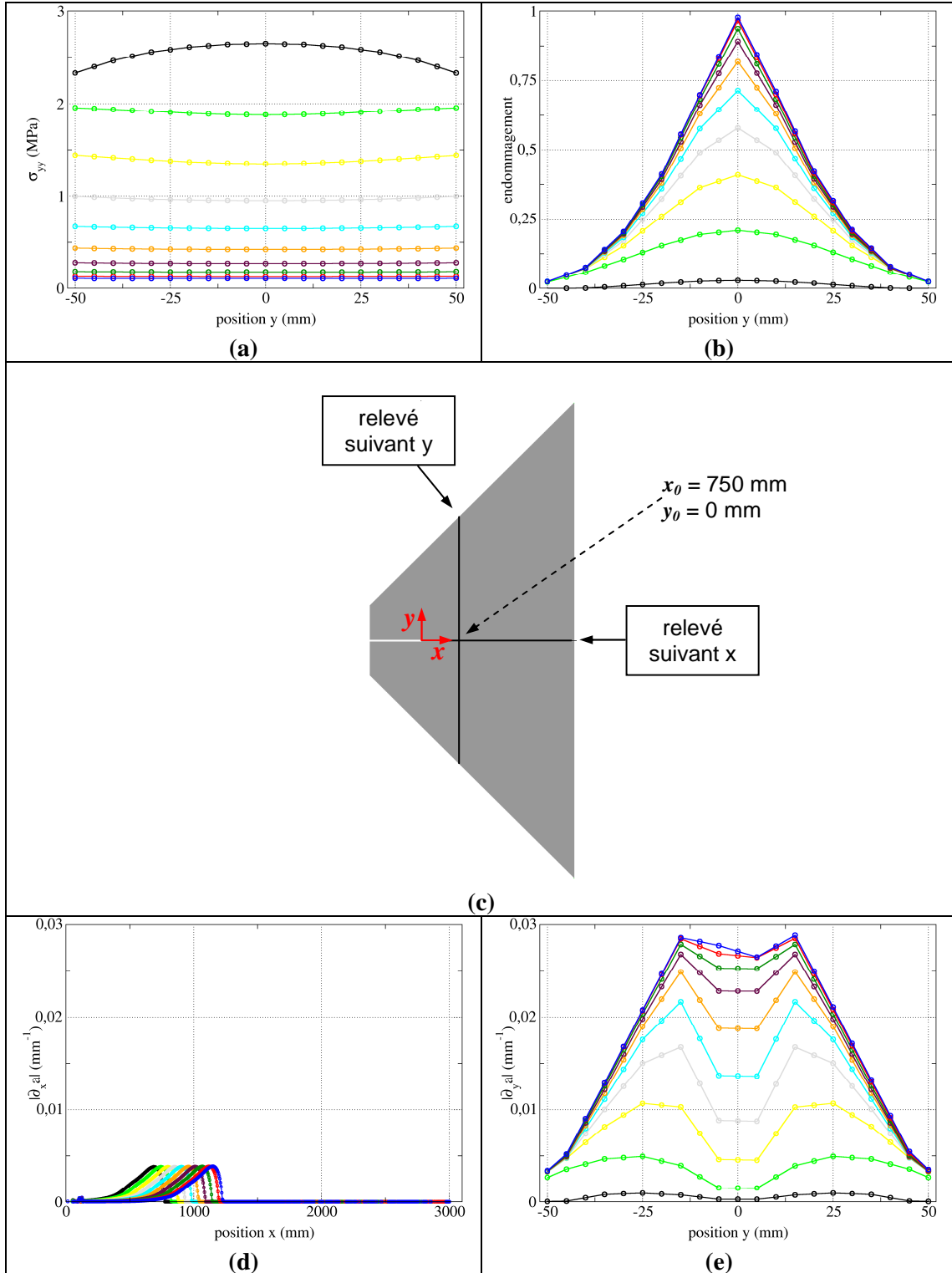


Figure 2 - 16

(a) contrainte  $\sigma_{yy}$  relevée selon  $y$  ; (b) endommagement relevé selon  $y$  ; (c) lieu des relevés ; (d) valeur absolue de la composante  $x$  du gradient d'endommagement relevée selon  $x$  ; (e) valeur absolue de la composante  $y$  du gradient d'endommagement relevée selon  $y$ .

Cela montre que si localement les champs peuvent être assimilés dans la direction transverse aux champs du cas unidimensionnel, le caractère propagatif dû à la composante  $\partial_x a$  n'est pas négligeable : il conviendra donc d'évaluer l'influence sur la réponse de la structure du paramètre d'endommagement critique  $a_{cr}$  déclenchant localement le passage vers le modèle cohésif.

### 3.2.2 Algorithme

Partant du fait que le trajet rectiligne de fissuration (correspondant au centre de la bande de localisation où l'endommagement est maximum) est connu *a priori*, il est possible de prendre en compte l'interface cohésive dans la discrétisation lors de la phase de maillage préalable au calcul. On considère donc un maillage conforme avec la discrétisation de l'interface rectiligne : les mailles du massif portent des éléments finis non locaux présentés au paragraphe 3.1.1, tandis que les mailles quadrangulaires d'épaisseur nulle disposées le long de  $\Gamma$  portent des éléments d'interface présentés au paragraphe 3.1.2. Il est montré dans [Lorentz et Godard, 2011] que pour des problèmes en dimension deux et trois, le modèle à gradient d'endommagement permet encore d'aboutir à une bande de localisation restant confinée dans une épaisseur  $2D$  comparable à celle qui a été prédite avec le modèle unidimensionnel. Tirant parti de cette propriété, on considère un maillage structuré composé uniquement de quadrangles dans la zone correspondant à la bande d'endommagement attendue afin de permettre un traitement plus simple et plus précis de la transition, et ce pour les deux raisons suivantes :

- i) En s'appuyant sur l'hypothèse que les champs d'endommagement et de contraintes sont localement assimilables dans la direction normale à  $\Gamma$  à ceux qui ont été observés dans le cas de la barre en traction pour un même niveau d'endommagement central  $\alpha_0$ , on doit identifier pour chaque point d'intégration de  $\Gamma$  la valeur centrale  $\alpha_0$  du profil d'endommagement dans la direction normale à  $\Gamma$  passant par ce point. Avec ce type de maillage structuré, chaque point de Gauss de l'interface cohésive ainsi que les deux points de Gauss plus proches voisins dans le massif appartiennent à la même normale à  $\Gamma$  (voir Figure 2 - 17 (b)). Dans une telle configuration, il est alors possible de déterminer pour le point de Gauss cohésif considéré la loi d'interface appropriée permettant d'assurer la transition selon la relation uniaxiale (2 - 79). Le terme correctif (2 - 78) de cette loi cohésive est alors calculé avec la valeur moyenne du champ  $\alpha$  évalué aux deux points d'intégration volumiques plus proches voisins (Figure 2 - 17 (b)), en faisant l'approximation que cette dernière est égale à l'endommagement maximal central  $\alpha_0$  (dont la valeur n'est pas connue puisqu'aucun point de collocation ne se situe sur  $\Gamma$ ). L'erreur induite par cette sous-estimation de  $\alpha_0$  devrait cependant diminuer en raffinant localement le maillage, puisque cela conduit à diminuer la distance entre ces points de Gauss non locaux et  $\Gamma$ .
- ii) Afin d'assurer proprement le passage au modèle cohésif, l'endommagement ne doit plus se développer dans les éléments volumiques de la bande de localisation situés de part et d'autre d'un élément d'interface « activé » (devant alors dissiper la part d'énergie transférée). Afin d'éviter ce problème, l'évolution de l'endommagement est « gelée » dans toutes ces couches d'éléments en leur affectant un comportement élastique linéaire, tout en conservant le champ de rigidité dégradée  $A(\alpha)\mathbf{E}$  aux points d'intégration, dû au champ d'endommagement  $\alpha$  atteint juste avant la transition. La

détection de ces éléments devient alors plus aisée avec un maillage structuré dans la bande de localisation.

**Remarque :**

Plutôt que de travailler avec le champ d'endommagement auxiliaire  $\alpha$  défini aux points de Gauss, on aurait également pu considérer le champ nodal  $a$  dont on connaît les valeurs aux nœuds. Cependant le choix de  $\alpha$  nous paraît plus justifié dans la mesure où il est le seul champ à satisfaire exactement la relation de comportement (l'égalité  $a = \alpha$  étant assurée en moyenne).

L'algorithme de couplage repose alors sur un critère simple devant être évalué en tout point de  $\Gamma$ , et qui stipule que l'endommagement peut évoluer dans les éléments non locaux voisins tant que sa valeur centrale  $\alpha_0$  ne dépasse pas une valeur critique  $a_{cr}$  choisie par l'utilisateur. Dans le cas contraire, le passage au modèle cohésif doit être localement déclenché :

$$\text{si } \alpha_0 \geq a_{cr}, \text{ passage au modèle cohésif} \quad (2 - 85)$$

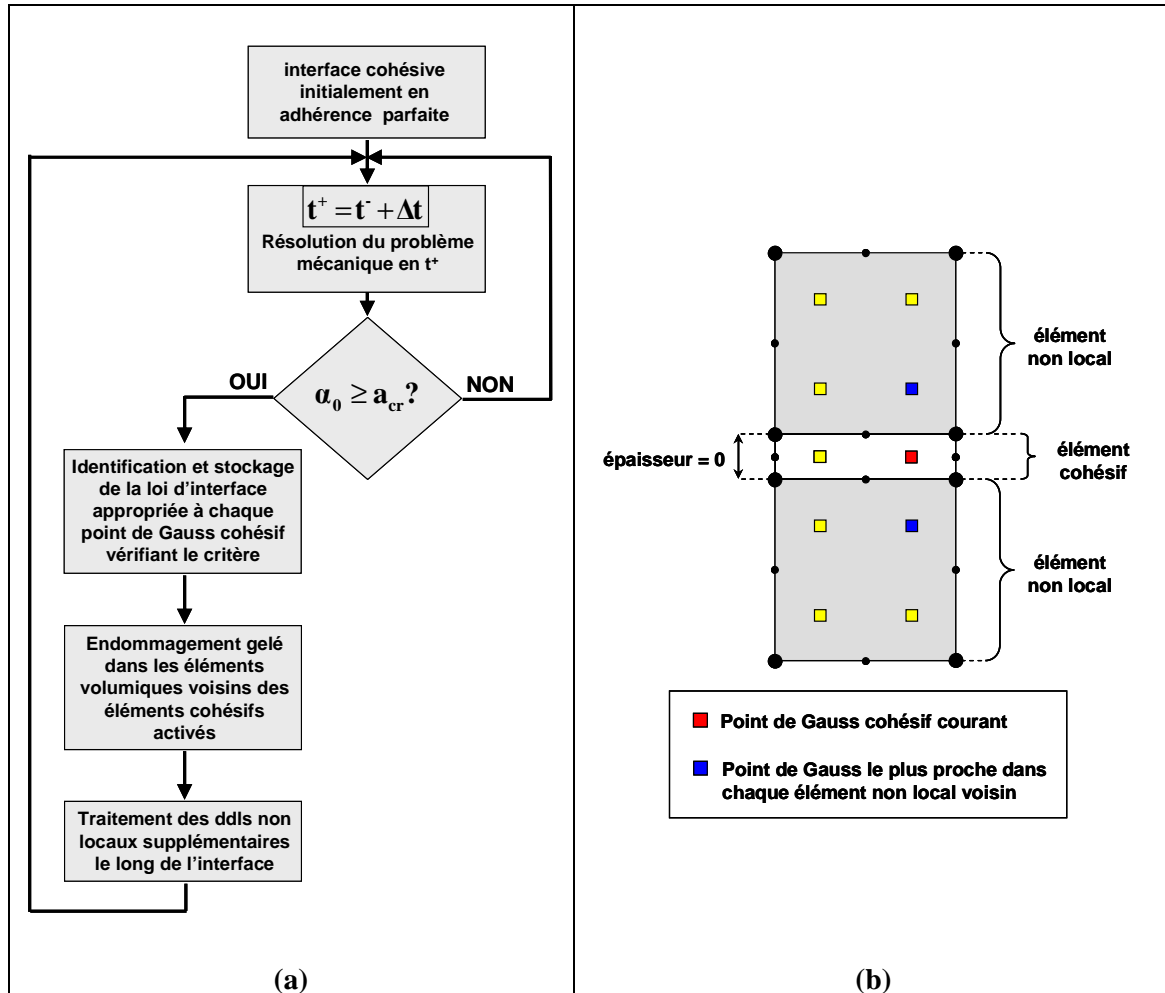


Figure 2 - 17

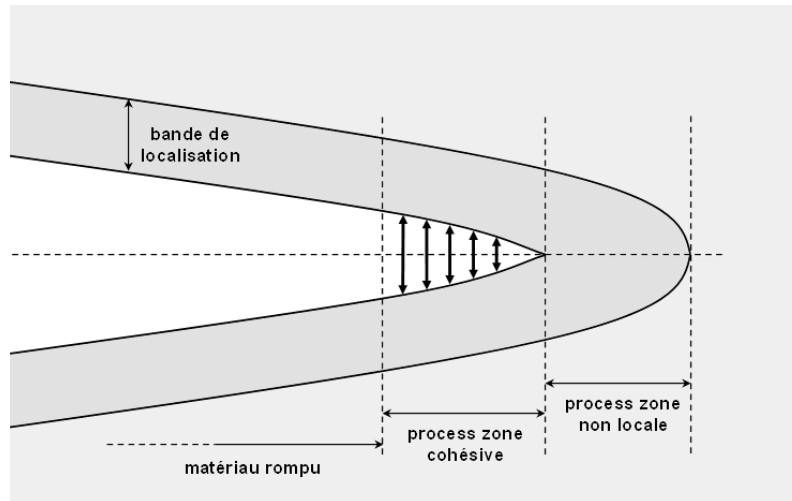
(a) algorithme de couplage explicite ;

(b) éléments non locaux directement voisins d'un élément cohésif.

Le calcul s'organise alors de la façon détaillée à la Figure 2 - 17 (a). La structure se trouvant dans un état initialement sain, tous les points d'intégration de l'interface cohésive  $\Gamma$  sont au départ en régime d'adhérence parfaite : aucune discontinuité du saut de déplacement n'est autorisée et l'endommagement peut évoluer au sein des éléments non locaux du massif. Le problème mécanique est résolu à mesure que le chargement évolue, et à la fin de chaque pas de temps convergé, le critère de déclenchement (2 - 85) est évalué en tout point d'intégration cohésif. Un élément d'interface est considéré comme activé au pas de temps suivant lorsqu'au moins un de ses points d'intégration vérifie le critère, si les autres ne le vérifient pas, ils quitteront toutefois leur état d'adhérence initiale. Dans ce cas, chacun de ces points de Gauss se verra affecter au pas de temps suivant une loi cohésive permettant d'assurer le transfert énergétique de manière appropriée à partir du niveau d'endommagement central  $\alpha_0$  lui correspondant (non nécessairement égal à  $a_{cr}$ ) et relevé à la fin du pas de temps courant, comme cela a été détaillé dans l'item i) ci-dessus. Ces éléments cohésifs étant activés au pas de temps suivant, l'endommagement volumique ne devra alors plus évoluer dans les éléments non locaux voisins disposés latéralement de part et d'autre. L'endommagement y est donc gelé dans toutes les couches de quadrangles contenues dans l'épaisseur  $2D$  comme cela a été détaillé dans l'item ii) ci-dessus. Un point supplémentaire devant être souligné est le traitement particulier qui doit être apporté aux degrés de liberté supplémentaires  $a$  et  $\lambda$  issus de la formulation non locale (respectivement les champs P1 – continus d'endommagement et de multiplicateur de Lagrange) et portés par tous les nœuds sommets (géométriquement coïncidents) des éléments d'interface. En effet, si pour chaque paire de nœuds coïncidents la condition  $[\mathbf{u}] = 0$  est assurée par la relation de comportement cohésive à partir du moment où l'état d'adhérence initiale est imposé, il faut également assurer dès le début du calcul les conditions de liaison  $[a] = 0$  et  $[\lambda] = 0$  à travers l'interface. Si ces dernières ne sont pas respectées, certaines contributions élémentaires seraient omises dans le calcul des forces internes associées à ces variables nodales ainsi que dans les blocs correspondants de la matrice tangente, ce qui viendrait perturber l'évolution de l'endommagement dans les zones où il est autorisé à se développer. Chacune de ces conditions de liaison est alors imposée par dualisation en ayant recours à un élément fini dédié de dimension 0 au niveau de chaque paire de nœuds sommets coïncidents sur laquelle on souhaite assurer la condition considérée. A mesure que la fissure cohésive se propage, cette condition est relâchée pour les paires de nœuds sommets des éléments d'interface activés (mais reste maintenue pour la paire de nœuds située en pointe de fissure cohésive), puisque la relation de comportement élastique linéaire adoptée dans les couches d'éléments non locaux situés de part et d'autre y interdit l'évolution de l'endommagement  $\alpha$ , et donc des variables nodales  $a$  et  $\lambda$ . Comme cela constitue toutefois un point délicat directement lié à la définition des conditions aux limites / conditions d'interface du modèle à gradient consécutive à l'insertion d'un incrément de fissure, on s'attachera à s'assurer qu'en maintenant uniquement ces conditions de liaison dans les zones où l'endommagement est autorisé à évoluer, les conditions  $[a] = 0$  et  $[\lambda] = 0$  restent vérifiées à travers la partie active de  $\Gamma$ .

Notons que l'algorithme de couplage détaillé à la Figure 2 - 17 (a) est de nature explicite puisque les modifications locales du modèle éléments finis consécutives au dépassement du critère (2 - 85) n'interviennent qu'entre deux pas de chargement successifs, et non au cours des itérations de Newton calculées au sein d'un pas. Ainsi lorsqu'un élément cohésif est activé à la fin d'un pas de temps, seules les valeurs d'endommagement central  $\alpha_0$  correspondant à chaque point d'intégration sont stockées pour construire au début du pas de temps suivant les lois cohésives de transition qui leur correspondent. D'un point de vue pratique, la loi cohésive équivalente (2 - 77) constituant la courbe maîtresse dont se déduisent les lois de transition est déterminée préalablement au calcul sur

la base de l'étude unidimensionnelle pour le jeu de paramètres matériaux considéré, et stockée comme une courbe tabulée. Le terme correctif (2 - 78) est alors calculé en chaque point de Gauss pour la valeur de  $\alpha_0$  précédemment stockée, ce qui permet de construire selon (2 - 79) les courbes tabulées contenant les lois cohésives de transition qui seront effectivement utilisées lors de l'intégration du comportement.



**Figure 2 - 18**

*Schéma des trois niveaux de description de la fissure.*

Finalement, l'implémentation de cette méthode devrait conduire lors des simulations à trois niveaux de description de la fissure au cours de sa propagation (voir Figure 2 - 18) :

- une *process zone* non locale décrivant les mécanismes de dégradation microscopiques précédant l'apparition d'une macro-fissure (située en amont de la pointe de fissure) et dont la longueur est directement liée à la valeur d'endommagement critique  $a_{cr}$  ;
- une *process zone* cohésive située en aval de la *process zone* non locale, au sein de laquelle est dissipée la part d'énergie restante et dont la longueur est également liée à la valeur de  $a_{cr}$  ;
- une surface libre, caractérisée par un dommage surfacique total et correspondant au matériau rompu.

### 3.2.3 Pilotage du chargement

Du fait du caractère adoucissant du matériau, on peut parfois se trouver en présence d'instabilités selon la géométrie des structures envisagées ainsi que le type de chargement qui leur est appliqué. Ces instabilités dues à des propagations brutales de fissures se manifestent lors d'une analyse quasi-statique par des snap-backs (retours en arrière) sur la réponse globale force – déplacement qui mettent en défaut la convergence de la méthode de Newton, il est alors nécessaire d'avoir recours à des techniques de pilotage du chargement. Nous choisissons ici d'utiliser une méthode de pilotage proposée dans [Lorentz et Badel, 2004] qui permet de distinguer les branches solutions correspondant à des décharges entièrement élastiques des branches dissipatives (pour lesquelles l'endommagement se propage dans la structure), et de ne suivre que ces dernières.

Applicable aux modèles d'endommagement continu comme aux modèles de zone cohésive, elle consiste à contrôler l'incrément d'endommagement maximal  $\Delta d = d^{n+1} - d^n$  (volumique ou surfacique) vu par les points d'intégration (de la structure ou de l'interface cohésive) au cours de chaque pas de temps. Ainsi, à chaque pas de chargement, le champ d'endommagement est incrémenté au plus d'une valeur égale à  $\Delta d^{\max}$  ( $\Delta d^{\max}$  étant un paramètre renseigné par l'utilisateur) en au moins un point de Gauss, tous les autres ne pouvant voir qu'un incrément d'endommagement lui étant inférieur ou égal.

Afin d'appliquer cette méthode de pilotage à notre approche couplée, nous choisirons de ne contrôler que l'incrément d'endommagement volumique  $\Delta \alpha$  (excluant ainsi les points d'intégration cohésifs de l'algorithme de pilotage), ce qui paraît justifié dans la mesure où c'est l'endommagement qui dans notre approche pilote le processus de fissuration. De plus, il conviendra évidemment d'exclure de l'algorithme tous les points d'intégration appartenant aux éléments dans lesquels l'évolution de l'endommagement a été gelée, ce qui ne nécessite pas d'effort supplémentaire puisque cela suppose que ces éléments aient déjà été identifiés afin de recevoir ce traitement particulier. Nous verrons alors dans les exemples d'application du chapitre suivant que ce choix permet de mener à bien les calculs.





# Chapitre 3

## Simulations numériques

---

1 Barre fragile en traction.....	107
2 Éprouvette DCB trapézoïdale.....	110
3 Plaque trouée.....	119
4 Vers une extension tridimensionnelle .....	122

---

Ce chapitre a pour but de présenter les résultats numériques issus de calculs éléments finis menés avec l'approche couplée proposée dans le chapitre 2. Trois exemples bidimensionnels y sont traités :

- La barre fragile soumise à un chargement de traction traitée analytiquement dans le chapitre 2 : ce cas-test constitue une première étape permettant de valider les développements informatiques dans la configuration la plus simple possible (ouverture de fissure uniquement, *i.e.* pas de propagation).
- L'éprouvette DCB trapézoïdale entaillée traitée dans le chapitre 1 (séparément avec le modèle non local ou avec le modèle cohésif), pour laquelle on a observé une propagation stable de fissure rectiligne. On s'attachera particulièrement à évaluer sur cet exemple l'influence du paramètre d'endommagement critique  $a_{cr}$ .
- Une plaque trouée soumise à un chargement de traction, conduisant à une multifissuration instable (propagation simultanée de deux fissures en présence de snap-backs).

L'extension directe de l'approche couplée aux situations tridimensionnelles sera ensuite évaluée sur le cas de l'éprouvette DCB trapézoïdale (cette fois extrudée), pour lequel on cherchera notamment à simuler la propagation de fronts de fissures courbes.

Nous traitons le cas de grandes structures constituées d'un matériau quasi-fragile de type béton : leurs dimensions caractéristiques sont de plusieurs mètres et les valeurs des paramètres matériaux du modèle à gradient d'endommagement seront choisies identiques à celles qui ont été utilisées dans les chapitres précédents (rappelées au Tableau 3 - 1). Le choix d'une épaisseur de bande endommagée  $2D = 100$  mm reste donc raisonnable par rapport aux dimensions des structures qui seront étudiées.

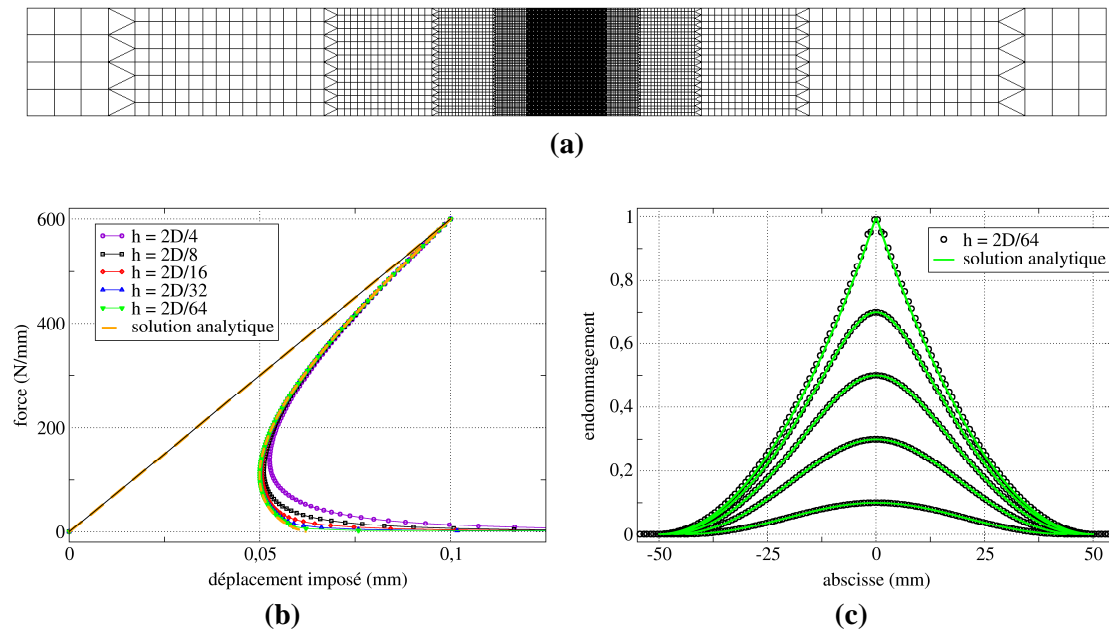
Paramètres macroscopiques observables	Paramètres internes du modèle
$E = 3.10^4$ MPa $\nu = 0.2$ $\sigma_y = 3$ MPa $G_f = 0.1$ N/mm $2D = 100$ mm	$k = 1.5 \cdot 10^{-3}$ MPa $\gamma = 4$ $c = 1.875$ N

**Tableau 3 - 1**

*Paramètres représentatifs d'un matériau de type béton.*

# 1 Barre fragile en traction

Ce premier exemple constitue une validation de certains aspects de l'implémentation qui a été réalisée, comme l'identification automatique des lois cohésives de transition ainsi que leur intégration. En effet, comme la solution correspondant à une localisation de l'endommagement au centre de la barre a été déterminée analytiquement au chapitre 2, elle constitue une solution de référence que nous cherchons à reproduire avec des calculs éléments finis : dans un premier temps avec le modèle non local seul, et dans un second temps avec l'approche couplée. Si la géométrie considérée de la barre est ici bidimensionnelle, l'inhomogénéité de la solution est attendue uniquement dans la direction longitudinale afin de se placer dans le cas d'une ouverture de fissure (pas de propagation, la solution cherchée étant homogène dans la direction transversale). On considère donc une barre de longueur  $2L = 2000$  mm et d'épaisseur  $e = 200$  mm. Les paramètres matériaux sont choisis selon le Tableau 3 - 1 sauf pour le coefficient de Poisson, fixé à  $\nu = 0$  afin de rester dans une configuration unidimensionnelle. Les conditions aux limites consistent en un déplacement de traction dans la direction longitudinale imposé aux deux extrémités de la barre tandis que les modes de corps rigides sont bloqués dans la direction transversale. On considère cinq maillages structurés, obtenus en raffinant successivement jusqu'à cinq fois un maillage initial grossier composé de quadrangles. À chaque étape de raffinement, la taille des mailles est divisée par deux au sein d'une boîte centrée au niveau de la bande de localisation attendue et dont la taille rétrécit à chaque étape. En notant  $h$  la taille des quadrangles dans la zone d'intérêt, et  $2D$  la largeur de la bande de localisation attendue,  $h$  varie de  $h = 2D/4$  pour le maillage le plus grossier à  $h = 2D/64$  pour le maillage le plus fin. (illustré à la Figure 3 - 1 (a)).



**Figure 3 - 1**

(a) maillage structuré pour le niveau de raffinement le plus élevé  $h = 2D/64$  ; (b) réponse force – déplacement du modèle non local pour chaque maillage ; (c) profils de dommage obtenus dans la bande de localisation à différents pas de temps pour le maillage le plus fin.

Afin de capter la branche correspondant à une localisation de l'endommagement au centre de la barre, on introduit un champ d'endommagement initial, préexistant au premier pas de temps sans quoi l'algorithme de Newton sélectionnerait naturellement la solution homogène : tous les points d'intégration appartenant aux deux couches d'éléments disposées au centre de la barre se voient affecter un endommagement de  $\alpha = 10^{-5}$ , tandis que  $\alpha$  est fixé à 0 partout ailleurs.

Une fois que le régime non linéaire est atteint, l'endommagement se développe au plus dans la bande  $[-D, D]$  tandis que le reste de la barre décharge élastiquement. Comme celle-ci a été choisie dix fois plus longue que dans l'exemple traité analytiquement au chapitre 2, une part plus importante de décharge élastique conduit au snap-back observé dans les réponses force – déplacement de la Figure 3 - 1 (b), nécessitant l'utilisation de la méthode de pilotage du chargement détaillée précédemment au chapitre 2. À la Figure 3 - 1 (b) sont comparées les réponses globales obtenues sur les cinq maillages considérés avec la solution analytique (traits pointillés oranges) détaillée au chapitre 2. Cette dernière a été recalculée pour une longueur de  $2L = 2000$  mm, et la force résultante est obtenue en multipliant la contrainte unidimensionnelle par l'épaisseur  $e$  de la barre. On peut observer qu'au début du snap-back, toutes les solutions éléments finis coïncident avec la solution analytique, et à mesure que l'endommagement augmente, un écart s'installe et les réponses deviennent asymptotiques là où la solution de référence prévoit un déplacement imposé fini à rupture. De plus, cet écart s'installe d'autant plus tôt que le maillage est grossier, ce qui signifie qu'à partir d'un certain niveau d'endommagement la taille des éléments ne permet plus de décrire avec suffisamment de précision le gradient de l'endommagement.

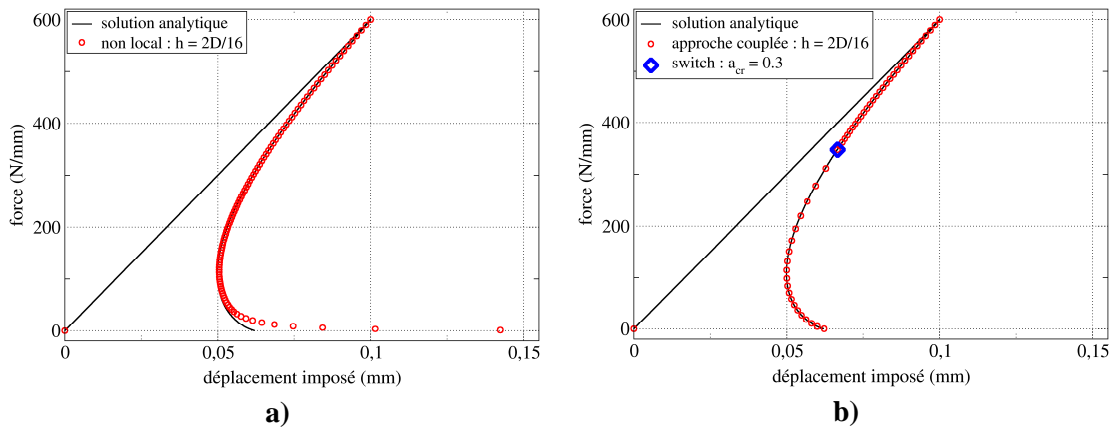


Figure 3 - 2

*Courbes force – déplacement obtenues pour le maillage  $h = 2D/16$  :*

*(a) modèle non local seul ; (b) approche couplée avec  $a_{cr} = 0.3$ .*

En effet, la Figure 3 - 1 (c) compare pour cinq niveaux de contraintes au sein de la barre les profils d'endommagement déterminés analytiquement et ceux relevés aux points de Gauss pour le calcul réalisé sur le maillage le plus fin ( $h = 2D/64$ ). Ils sont tous parfaitement coïncidents excepté pour le profil pointu se rapportant à une contrainte quasi-nulle : le calcul éléments finis conduit à une légère surestimation (erreur relative maximale d'environ 2%). En revanche, l'erreur relative observée sur le point correspondant de la réponse globale (Figure 3 - 1 (b), courbe verte) est notablement amplifiée (erreur relative d'environ 25%). Même si une telle correspondance entre la description locale des champs mécaniques et la réponse globale est spécifique aux problèmes unidimensionnels, cela peut donner une première idée quant à la manière de définir le paramètre d'endommagement critique  $a_{cr}$  : étant donnée une taille de maille caractéristique  $h$  dans la zone d'intérêt,  $a_{cr}$  peut être

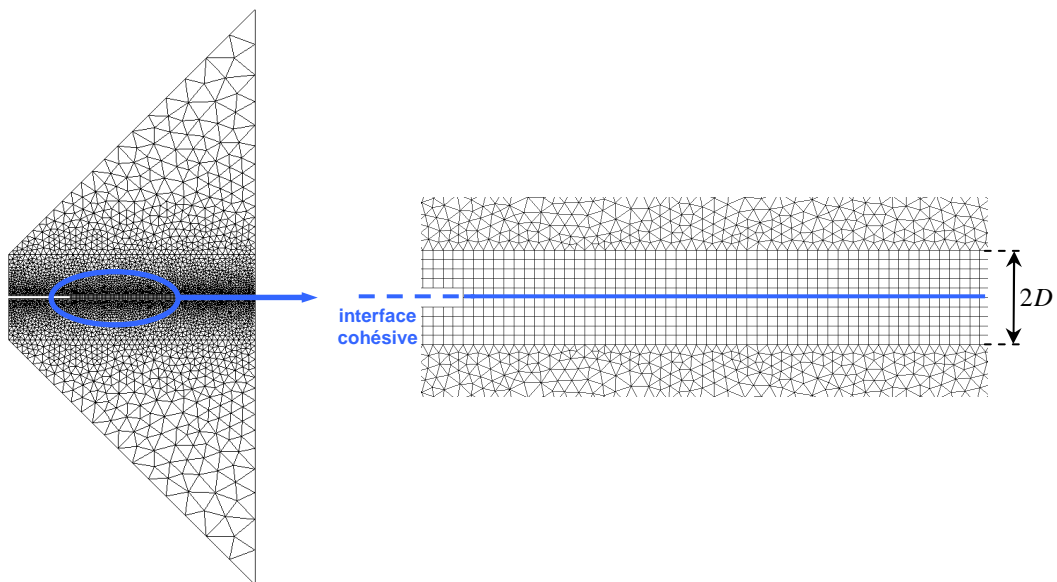
défini comme l'endommagement central  $\alpha_0$  au-delà duquel le gradient de l'endommagement n'est plus approché avec une précision suffisante.

La Figure 3 - 2 (b) illustre la réponse force – déplacement obtenue avec l'approche couplée pour le maillage correspondant à  $h = 2D/16$ , avec un endommagement critique fixé à  $a_{cr} = 0.3$ . Pour cette simulation, l'interface cohésive a été préalablement introduite, et tous les éléments cohésifs restent adhérents tant que le critère de dépassement  $\alpha_0 \geq a_{cr}$  n'est pas vérifié. Une fois ces éléments activés, tous les éléments non locaux sont alors affectés d'un comportement élastique linéaire. Un très bon accord avec la solution de référence est observé tout au long de la phase adoucissante, et particulièrement aux derniers stades de la rupture là où le modèle non local Figure 3 - 2 (a) aboutit à une réponse asymptotique. Ceci permet donc de valider dans un premier temps l'identification automatique des lois cohésives de transition ainsi que leur intégration. Cependant, ce cas-test ne traite que le cas d'une ouverture de fissure, il conviendra donc d'évaluer dans les sections suivantes la mise en œuvre de notre approche dans des situations de véritables propagations de fissures.

## 2 Éprouvette DCB trapézoïdale

Nous revenons ici sur le cas de l'éprouvette DCB trapézoïdale entaillée étudié au chapitre 1, § 3.2, pour lequel on observe une propagation stable et rectiligne de fissure en mode I. On souhaite ici évaluer les points potentiellement délicats relatifs à l'emploi de notre approche sur un cas propagatif restant suffisamment simple, dont certains ont déjà été identifiés au chapitre 2, § 3.2.2.

La géométrie et les conditions de chargement restent identiques, les hypothèses de maillage sont quant à elles conformes au cadre qu'on s'est fixé au chapitre 2 : un maillage structuré composé de quadrangles de taille  $h$  au niveau de la bande de localisation attendue (épaisseur  $2D$ ), traversé par une interface cohésive dans le prolongement de l'entaille (voir Figure 3 - 3 pour la configuration  $h = 2D/10$ ). Les paramètres matériaux sont détaillés au Tableau 3 - 1.



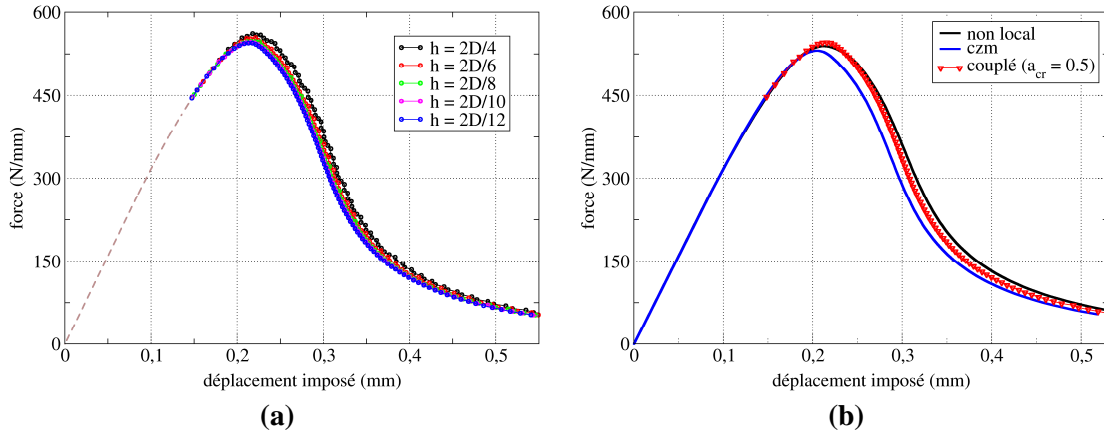
**Figure 3 - 3**

*DCB trapézoïdale : hypothèses de maillage ( $h = 2D/10$ ).*

### Sensibilité à la taille de maille

On s'intéresse tout d'abord à la sensibilité à la taille de maille, mais contrairement à ce qui a été fait pour la barre en traction, diviser par deux la taille  $h$  dans la zone d'intérêt à chaque étape de raffinement conduirait rapidement à un nombre de degrés de liberté bien trop élevé vues les dimensions de la structure, et des niveaux de raffinement comme  $h = 2D/64$  seraient totalement prohibitifs en termes de temps de calcul. Nous considérons donc cinq maillages construits de telle sorte que  $h = 2D/4, 2D/6, 2D/8, 2D/10, 2D/12$ , ce qui conduit à un nombre de degrés de liberté allant de 45 470 à 153 830. Chaque calcul est mené avec un endommagement critique fixé pour l'instant à  $a_{cr} = 0.5$ , les résultats sont tracés à la Figure 3 - 4 (a) en termes de réponse force – déplacement. Les traits pointillés gris sont relatifs aux premiers pas de chargement pendant lesquels l'endommagement se développe en fond d'entaille et n'excède pas sa valeur critique, à la fin de

cette phase le critère  $\alpha_0 \geq a_{cr}$  y est vérifié : les descriptions continues et discontinues commencent alors à coexister dans le modèle éléments finis. La réponse obtenue avec le maillage le plus grossier exhibe de légers sauts qui s'atténuent à mesure que  $h$  diminue, et devient finalement lisse lorsque  $h = 2D/12$ . Ces irrégularités sont imputables à une description trop grossière du champ d'endommagement, à laquelle vient s'ajouter l'approximation mentionnée au chapitre 2, § 3.2.2, qui consiste à considérer que l'endommagement  $\alpha$  relevé aux points de Gauss du massif plus proches voisins d'un point de Gauss cohésif est assimilable à l'endommagement central  $\alpha_0$ . Cela conduit à identifier des lois cohésives de transition qui ne satisfont pas rigoureusement le bilan énergétique aux points d'intégration d'une extension de fissure cohésive.



**Figure 3 - 4**

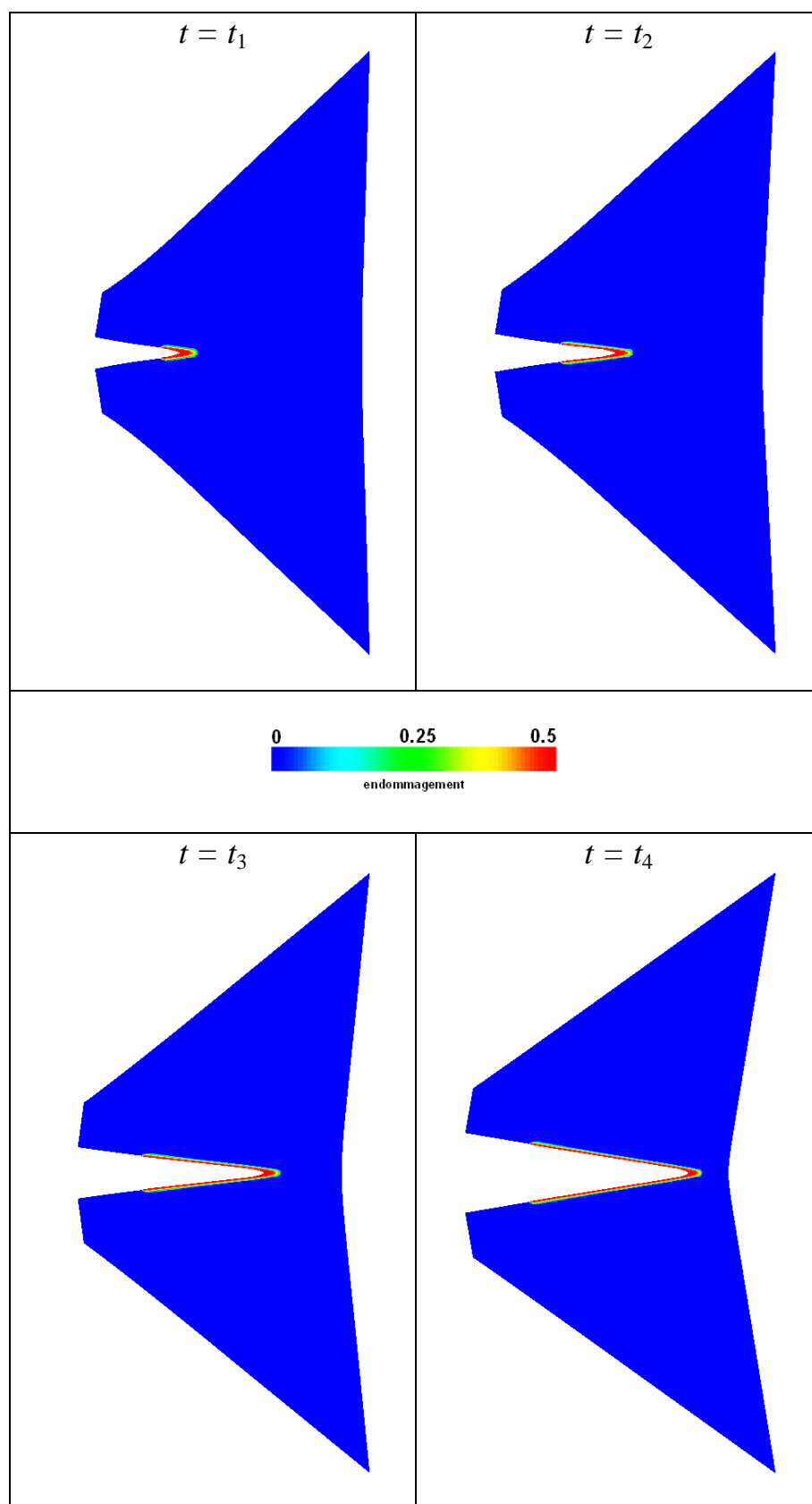
*DCB trapézoïdale,  $a_{cr} = 0.5$  : (a) réponses globales en fonction de la taille de maille  $h$  ;  
(b) réponses globales obtenues sur le maillage le plus fin ( $h = 2D/12$ ).*

### Comparaison avec les approches non locale et cohésive

À la Figure 3 - 4 (b) on compare les réponses force – déplacement obtenues sur le maillage le plus fin ( $h = 2D/12$ ) avec le modèle non local, le modèle cohésif, et l'approche couplée. Le modèle cohésif correspond en fait à  $a_{cr} = 0$ , ce qui revient à n'utiliser que la loi cohésive équivalente, et à affecter un comportement élastique linéaire au massif. La réponse globale obtenue avec l'approche couplée coïncide d'abord avec celle du modèle non local, et se situe dans la phase post-pic entre les réponses non locale et cohésive (l'écart observé entre ces dernières a déjà été étudié au chapitre 1). On note toutefois qu'un bon accord est obtenu avec la réponse non locale, ce qui fournit un premier élément de validation de l'extension des résultats unidimensionnels avec l'approche couplée proposée.

### Propagation de fissure et identification des process zones

D'un point de vue plus qualitatif, les profils d'endommagement obtenus au cours de cette simulation ( $a_{cr} = 0.5$  et  $h = 2D/12$ ) sont tracés à la Figure 3 - 5 pour quatre pas de chargement distincts dans la configuration déformée (amplifiée 800 fois) de telle sorte que l'ouverture de fissure puisse être clairement appréciée. Comme cela était attendu, l'endommagement se développe en amont de la pointe de fissure cohésive (dont on constate la propagation à mesure que le chargement augmente), et ce dernier reste borné par sa valeur critique (ici 0.5).

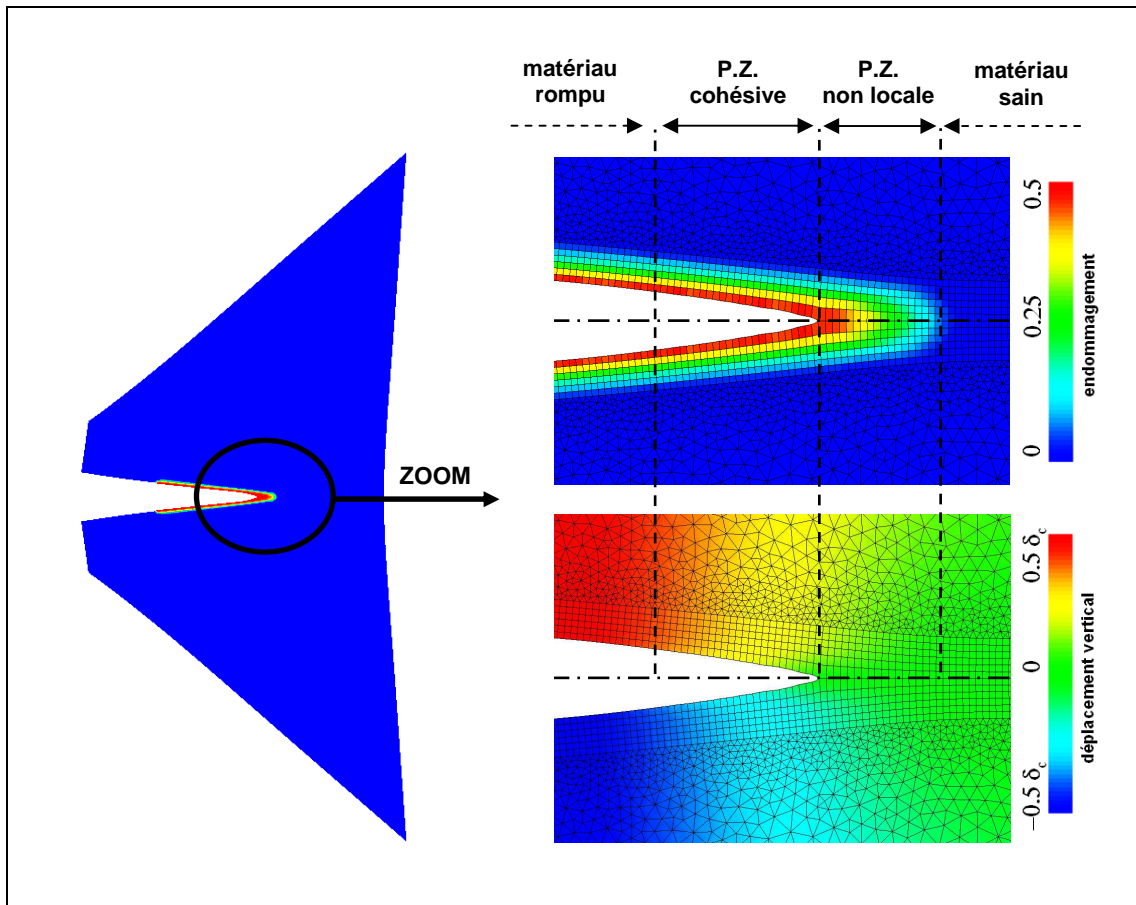


**Figure 3 - 5**

*DCB trapézoïdale : cartes d'endommagement à quatre instants de calcul reportées sur la configuration déformée (facteur d'amplification = 800), pour  $h = 2D/12$  et  $a_{cr} = 0.5$ .*



La Figure 3 - 6 présente un zoom sur une des cartes de la Figure 3 - 5 au niveau de la pointe de fissure. On constate que la bande endommagée reste bien confinée tout au long de sa propagation dans la région maillée en quadrangles, et que l'endommagement atteint bien sa valeur critique dans la première couche d'éléments située de part et d'autre des lèvres de la fissure. Située en amont de la pointe de fissure cohésive, la *process zone* (P.Z.) non locale peut être définie comme la région dans laquelle l'interface cohésive reste adhérente et l'endommagement évolue. Comme on peut le constater sur cette carte d'endommagement, cette *process zone* contient plusieurs éléments directement voisins de l'interface au sein desquels l'endommagement a atteint sa valeur critique : ceci conduira au pas de temps suivant à l'activation des éléments cohésifs disposés entre ces derniers et donc à l'introduction d'un incrément de fissure cohésive.



**Figure 3 - 6**

*Zoom sur les process zones : cartes d'endommagement et de déplacement vertical reportées sur la configuration déformée amplifiée 800 fois, pour  $h = 2D/12$ ,  $a_{cr} = 0.5$ , et  $\delta_c = 0.124$  mm.*

En aval de la pointe de fissure, la *process zone* cohésive est définie comme la portion de l'interface dans laquelle l'endommagement surfacique est strictement compris entre 0 et 1 (ou dans laquelle le saut de déplacement est compris entre 0 et sa valeur critique  $\delta_c$  puisque le chargement est monotone croissant). On a vu au chapitre 2, § 2.5.2, que la valeur du saut de déplacement critique  $\delta_c$  (ou saut à rupture) reste inchangée quelle que soit la loi cohésive de transition se déduisant d'une même loi cohésive équivalente, et égale à la valeur du saut  $\delta_c$  de cette courbe maîtresse. Ainsi, toutes les lois cohésives identifiées aux points d'intégration de l'interface sont caractérisées par un même saut critique  $\delta_c$  (même si la valeur de  $\alpha_0$  relevée n'est pas nécessairement la même d'un point à l'autre), et dans ce cas la *process zone* cohésive peut être clairement identifiée sur la carte de composante

verticale du champ de déplacement en restreignant l'échelle de couleur à l'intervalle d'amplitude  $\delta$  centré en 0, comme cela est fait à la Figure 3 - 6. Pour des valeurs de  $\delta$  strictement supérieures à  $\delta_c$ , plus aucune force ne s'exerce entre les lèvres de la fissure : le matériau est rompu et l'interface représente alors une fissure libre.

### Influence du paramètre d'endommagement critique

L'étape suivante consiste à analyser l'influence du paramètre d'endommagement critique  $a_{cr}$  en termes de réponses globales (courbes force – déplacement) et locales (taille des *process zones*). On fixe la taille de maille dans la zone d'intérêt à  $h = 2D/10$ , et les calculs sont successivement menés avec  $a_{cr} = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ .

Tout d'abord, on s'assure bien à la Figure 3 - 7 (a) que le niveau de raffinement du maillage est suffisant pour éviter les oscillations précédemment observées à la Figure 3 - 4 (a) dans les courbes force – déplacement, puisque chaque courbe correspondant ici à une valeur de  $a_{cr}$  est lisse. Ces résultats montrent une très faible dépendance au paramètre  $a_{cr}$ , avec un écart maximal observé au pic (d'environ 5%) qui diminue significativement dans la phase post-pic. On note que quelque soit la valeur de l'endommagement critique, le pic de force est atteint pour la même amplitude de déplacement imposé qu'avec le modèle non local.

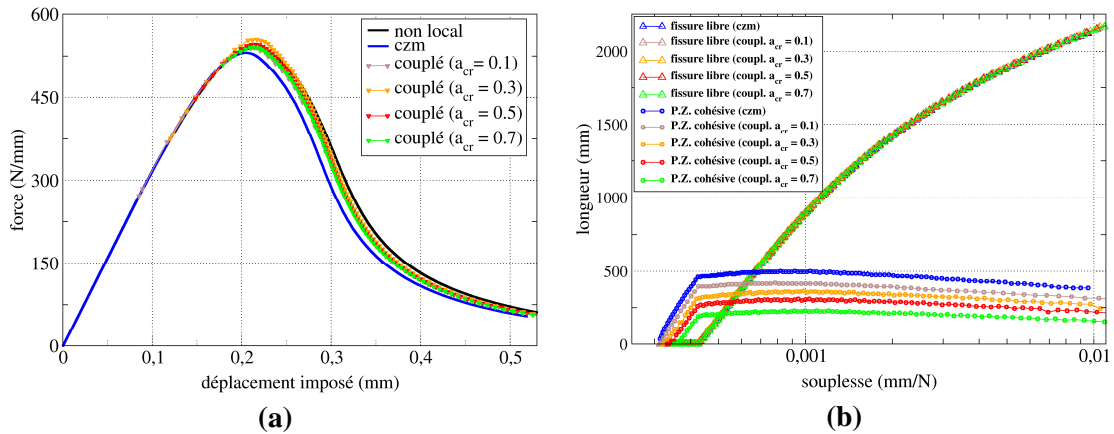


Figure 3 - 7

DCB trapézoïdale ( $h = 2D/10$ ) : (a) réponses force – déplacement en fonction de  $a_{cr}$  ; (b) évolution de la taille des process zones cohésives et des fissures libres en fonction de  $a_{cr}$ .

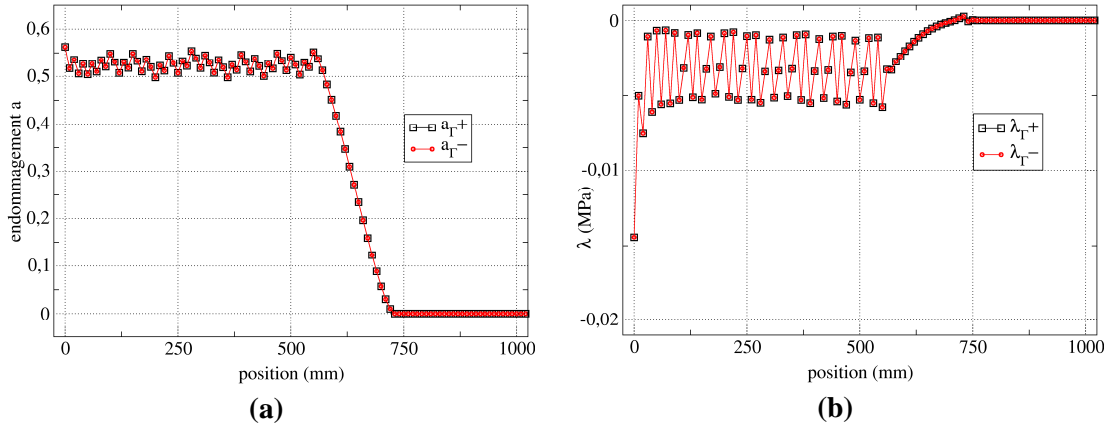
L'influence du paramètre  $a_{cr}$  est ensuite évaluée en termes d'évolution de la fissure cohésive. Les courbes d'évolution de la taille de la *process zone* cohésive ainsi que de la fissure libre sont tracées à la Figure 3 - 7 (b) en fonction de la souplesse de la structure pour les quatre valeurs de  $a_{cr}$  de même que pour le modèle cohésif seul ( $a_{cr} = 0$ ). La taille de la *process zone* cohésive est déterminée à la fin de chaque pas de temps comme la somme des longueurs des éléments d'interface au sein desquels l'endommagement surfacique appartient à  $]0,1[$ . De la même manière, la longueur de la fissure libre est calculée comme la somme des longueurs des éléments d'interface où l'endommagement surfacique est total. Chaque courbe d'évolution de la longueur de P.Z. cohésive se décompose en trois étapes : d'abord une partie croissante correspondant à l'initiation (qui s'arrête au moment où le premier point d'intégration de l'interface s'endommage totalement), ensuite un plateau relatif au régime de propagation stationnaire, et enfin une partie décroissante qui débute lorsque la pointe de fissure se rapproche du bord de la structure. On a vu au

paragraphe précédent que la taille de la P.Z. non locale croît avec l'endommagement critique, aussi si les lois cohésives de transition sont correctement identifiées, notre approche devrait conduire à des longueurs de *process zone* cohésive qui décroissent lorsque  $a_{cr}$  croît, de telle sorte que la taille de la P.Z. totale (non locale + cohésive) reste constante. C'est bien ce que nous observons à la Figure 3 - 7 (b) pour  $a_{cr} = 0.1, 0.3, 0.5$ , et  $0.7$ . Un autre résultat important réside dans le fait que les trois étapes (amorçage, propagation stationnaire, et effet de bord) caractérisant l'évolution des P.Z. cohésives sont définies sur les mêmes intervalles de souplesse, et que parallèlement à cela, les courbes d'évolutions des fissures libres restent toutes parfaitement confondues.

Tout ceci contribue à montrer qu'indépendamment du choix de l'endommagement critique, les propriétés du modèle cohésif sont préservées en termes de description de la cinétique de propagation, et que notre approche permet de mettre simultanément en œuvre les modèles continu et discontinu dans un cadre cohérent.

### Continuité des degrés de liberté supplémentaires au travers de l'interface

Un autre point que l'on s'est proposé d'examiner concerne la continuité des degrés de liberté supplémentaires relatifs à la formulation non locale  $a$  et  $\lambda$  (respectivement l'endommagement nodal et le multiplicateur de Lagrange) à travers la fissure cohésive au cours de sa propagation. On rappelle (voir chapitre 2, § 3.2.2) que le long de l'interface, les conditions de liaison  $[[a]] = 0$  et  $[[\lambda]] = 0$  sont assurées par dualisation sur les paires de nœuds sommets géométriquement coïncidents des éléments d'interface, et qu'elles sont relâchées dès lors que ces derniers sont activés.



**Figure 3 - 8**

*DCB trapézoïdale ( $h = 2D/10$ ), à la fin d'un pas de temps convergé : (a) champ d'endommagement nodal  $a$  et (b) de multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  le long de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$ .*

On cherche donc à vérifier que ces conditions restent préservées en ne procédant qu'à la modification de la relation de comportement (passage à un comportement élastique linéaire) des couches d'éléments non locaux situés de part et d'autre des éléments d'interface activés, ce qui a pour conséquence d'interdire localement l'évolution du champ d'endommagement  $\alpha$ . Les Figure 3 - 8 (a) et (b) présentent un relevé effectué le long des lèvres supérieure  $\Gamma^+$  et inférieure  $\Gamma^-$  de chaque quantité nodale à la fin d'un même pas de temps convergé (largement ultérieur à l'introduction du premier incrément de fissure cohésive). On s'assure bien que les conditions de continuité à travers  $\Gamma$  restent vérifiées.

### Où bloquer l'évolution de l'endommagement volumique ?

Lorsque des éléments d'interface sont activés à la fin d'un pas de temps, on a jusqu'à présent interdit l'évolution de l'endommagement  $\alpha$  dans toutes les couches de quadrangles situées de part et d'autre de l'interface dans l'épaisseur  $2D$  de la partie structurée du maillage (voir Figure 3 - 9), puisque cette dernière correspond à la largeur maximale de la bande de localisation attendue au cours de la propagation. Cette opération est nécessaire sans quoi la convergence du calcul est mise en défaut au pas de temps suivant. Toutefois, afin d'envisager des hypothèses de maillage moins contraignantes, on cherche ici à évaluer, pour une taille de maille  $h$  donnée, l'influence du paramètre d'endommagement critique sur le nombre de couches d'éléments non locaux qu'il suffit effectivement de rendre élastique. Pour ce faire, on considère par exemple le maillage correspondant à  $h = 2D/10$  et on réalise trois simulations avec  $a_{cr} = 0.1, 0.3$ , et  $0.7$  en continuant dans un premier temps à geler l'évolution de l'endommagement dans toutes les couches de quadrangles mentionnées précédemment.

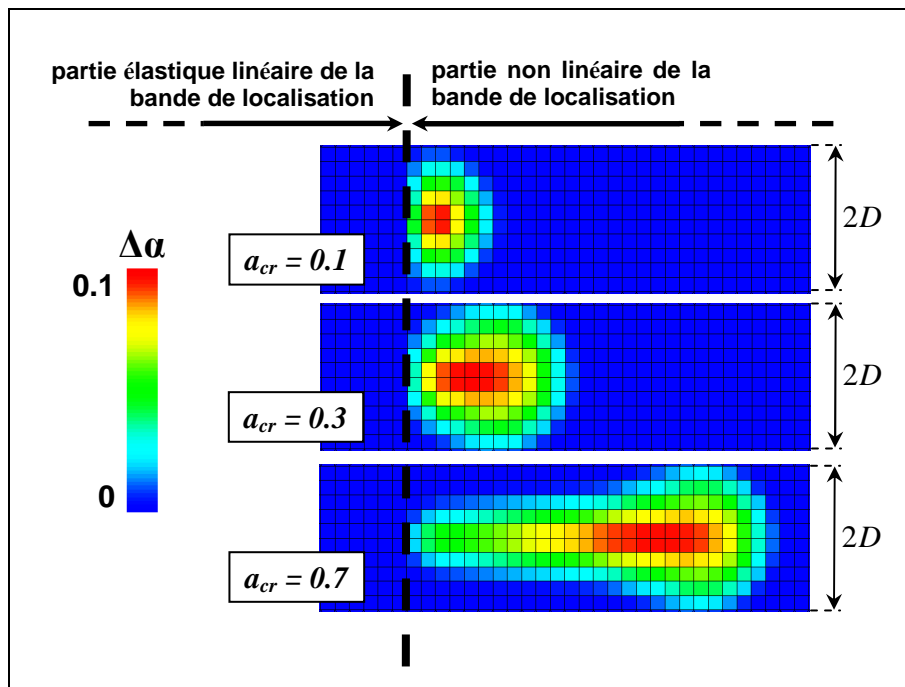
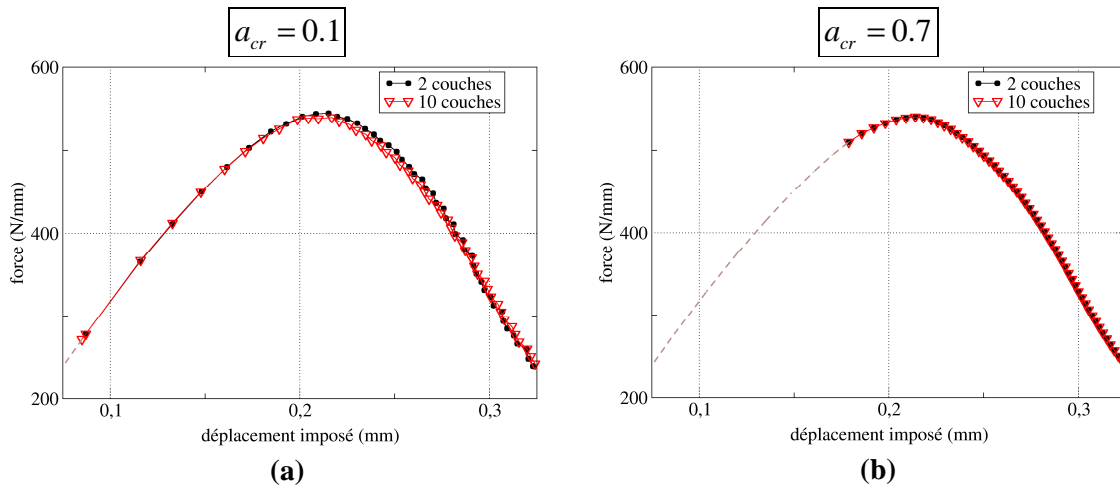


Figure 3 - 9

*Influence de  $a_{cr}$  sur la distribution spatiale de l'incrément d'endommagement  $\Delta\alpha$  ( $h = 2D/10$ ).*

En observant à la fin d'un pas de temps les cartes du champ d'incrément d'endommagement  $\Delta\alpha$  correspondantes (voir Figure 3 - 9), il est alors possible de déterminer le nombre de couches qu'il aurait suffi de désactiver au cours de ce pas : il est donné par le nombre de quadrangles situés à la frontière de la zone non linéaire au sein desquels  $\Delta\alpha$  est strictement positif. Afin de rendre ces résultats comparables, la méthode pilotage du chargement présentée au chapitre 2, § 3.2.3, a été utilisée afin d'imposer au cours du pas de temps la même valeur maximale de  $\Delta\alpha$ , fixée ici à 0.1. La comparaison est de plus effectuée au cours du régime de propagation stationnaire. On observe ainsi qu'il suffisait de geler huit couches de quadrangles pour  $a_{cr} = 0.1$ , contre deux couches pour  $a_{cr} = 0.7$ . On peut alors comparer les résultats obtenus par exemple pour  $a_{cr} = 0.1$  et  $a_{cr} = 0.7$  en désactivant soit toutes les couches (dix), soit uniquement celles qui sont directement

voisines de l'interface (deux). Les Figure 3 - 10 (a) et (b) présentent les réponses force – déplacement correspondantes : comme on pouvait s'y attendre, un écart est observé pour  $a_{cr} = 0.1$  tandis que les deux courbes sont confondues pour  $a_{cr} = 0.7$ .



**Figure 3 - 10**

*DCB trapézoïdale ( $h = 2D/10$ ) : influence du nombre de couches d'éléments non locaux désactivés sur la réponse force – déplacement avec (a)  $a_{cr} = 0.1$  et (b)  $a_{cr} = 0.7$ .*

Le choix d'un maillage structuré de quadrangles a été principalement fait afin de disposer les éléments non locaux le long d'une même normale à un élément d'interface, et ainsi de pouvoir les récupérer aisément au cours de telles opérations. Toutefois, en déterminant la valeur de  $a_{cr}$  au-delà de laquelle il suffit de ne désactiver que les deux couches centrales du maillage structuré pour une taille de maille  $h$  donnée (et pour un jeu de paramètres matériau donné), on peut alors adopter des hypothèses de maillage moins contraignantes et se contenter par exemple de n'imposer qu'une taille constante aux mailles directement connectées à l'interface, autorisant ainsi l'utilisation de maillages libres.

### Coût de calcul induit par l'introduction d'une fissure cohésive

Enfin, un dernier point qu'il convient d'examiner concerne l'influence du paramètre  $a_{cr}$  sur le coût de calcul, dans la mesure où il est *a priori* concevable qu'une extension de fissure cohésive activée entre deux pas de temps puisse nécessiter davantage d'itérations de Newton au pas suivant que lorsque le modèle non local est employé seul.

nombre d'itérations de Newton par pas de temps	non local	couplé, $a_{cr} = 0.1$	couplé, $a_{cr} = 0.3$	couplé, $a_{cr} = 0.5$	couplé, $a_{cr} = 0.7$
maximum	10	10	10	9	9
minimum	7	7	6	6	6
moyen	7.7	8.5	7.8	7.5	7.6

**Tableau 3 - 2**

*Comparaison en termes de coût de calcul (nombre d'itérations de Newton par pas de temps) entre calcul non local et calcul couplé, pour le maillage  $h = 2D/10$ .*

En effet, une non linéarité supplémentaire est ainsi introduite au niveau de la *process zone* cohésive, dont la taille dépend directement de la valeur  $a_{cr}$ . Cependant, un tel coût supplémentaire n'est pas observé, comme cela a été reporté au Tableau 3 - 2 : le modèle non local et l'approche couplée proposée nécessitent pour un même maillage (ici  $h = 2D/10$ ) et pour une même évolution du chargement un nombre moyen (sur toute la durée de la propagation) d'environ huit itérations de Newton par pas de temps quelque soit la valeur de  $a_{cr}$ .

### 3 Plaque trouée

On considère dans cette section une plaque trouée carrée, soumise à un chargement de traction de type effort imposé sur deux cotés opposés. La géométrie ainsi que le chargement sont représentés à la Figure 3 - 11 (a) : le trou étant situé au centre de la plaque, on s'attend à la propagation simultanée de deux fissures le long des deux ligaments, mais une possible perte de symétrie pourrait très bien s'installer en raisons d'éventuelles imperfections du maillage. Ce dernier est représenté à la Figure 3 - 11 (b) ; nous conservons un maillage structuré de quadrangle dans la bande de localisation, et disposons préalablement en son centre les mailles dégénérées portant les éléments d'interface.

Cette étude vise d'une part à tester notre approche dans le cas où plusieurs fissures se propagent au sein de la même structure, et d'autre part dans le cas où cette propagation est de nature instable, conduisant pour une analyse quasi-statique à la présence de snap-back(s) dans la réponse globale de la structure. Ces instabilités rendent alors indispensable l'utilisation de la méthode de pilotage du chargement.

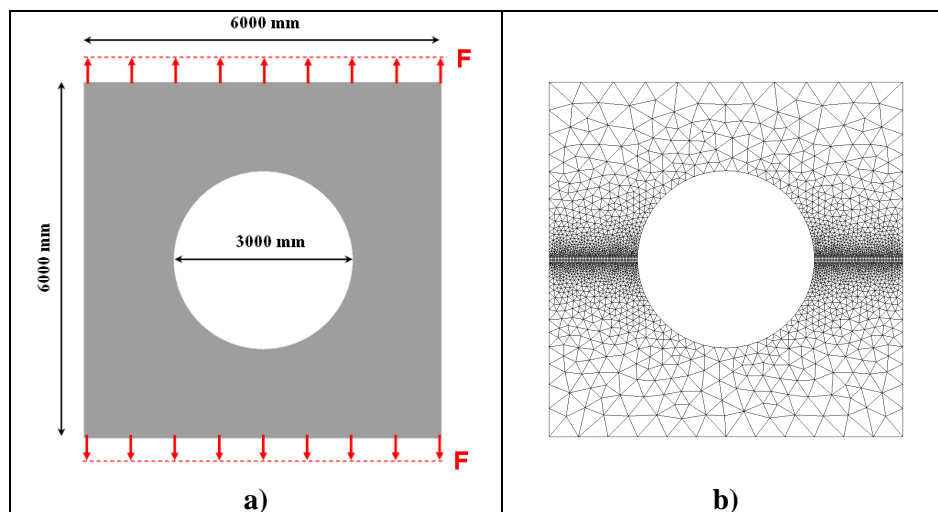
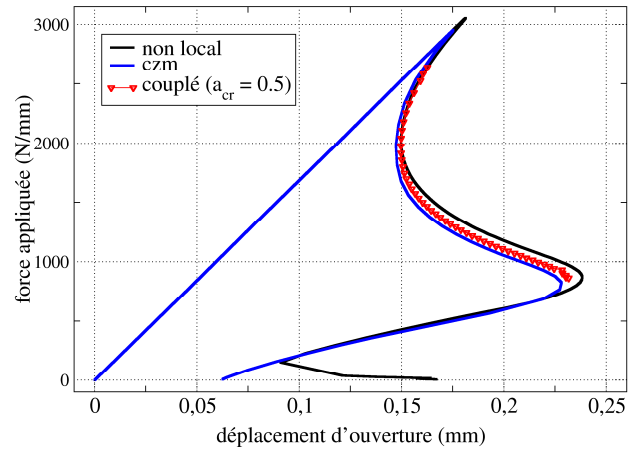


Figure 3 - 11

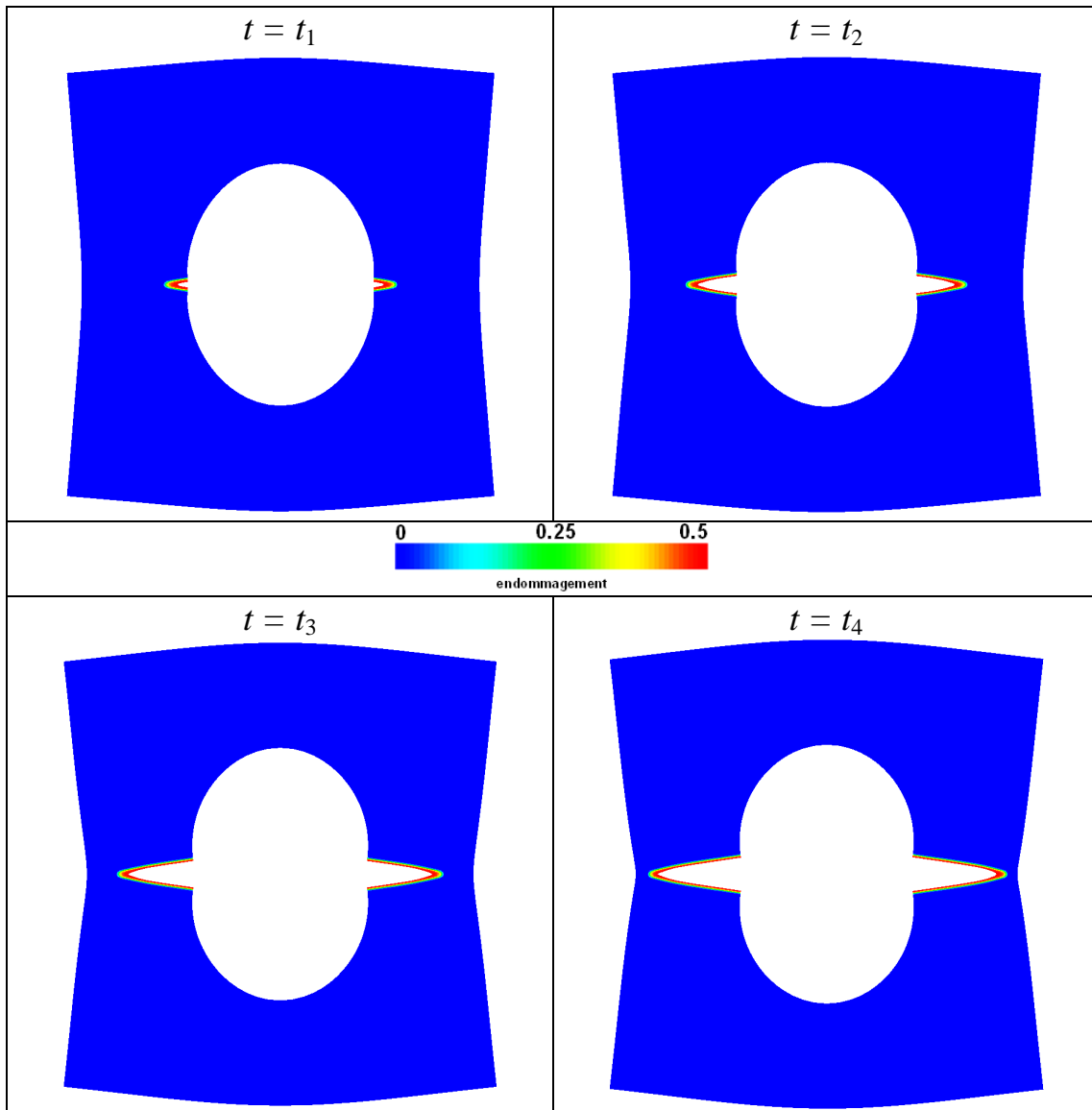
Plaque trouée : (a) géométrie et conditions de chargement ; (b) maillage  $h = 2D/10$ .

Deux simulations sont d'abord effectuées, la première avec le modèle non local et la seconde avec le modèle cohésif ( $a_{cr} = 0$ ) : les résultats sont tracés à la Figure 3 - 12 en termes de réponse globale : le premier snap-back correspond à la propagation simultanée des deux fissures (au cours de laquelle un léger écart est constaté entre les réponses non locales et cohésives), et s'achève lorsque les deux *process zones* atteignent les bords de la structure. Le second snap-back est relatif à la rupture totale des deux ligaments résiduels : la symétrie est préservée avec le modèle cohésif (courbe bleue), tandis qu'elle est perdue avec le modèle non local (courbe noire) juste avant la rupture complète de la structure. Les deux ligaments sont alors successivement cassés, ce qui se traduit par la bifurcation observée sur la courbe noire. Notons que ces instabilités sont caractéristiques d'une propagation brutale de fissures, pour laquelle la réponse physique de la structure est en fait de nature dynamique, sortant ainsi de notre périmètre d'étude volontairement borné aux analyses quasi-statiques.



**Figure 3 - 12**

*Plaque trouée : réponse force – déplacement pour  $h = 2D/10$  et  $a_{cr} = 0.5$ .*



**Figure 3 - 13**

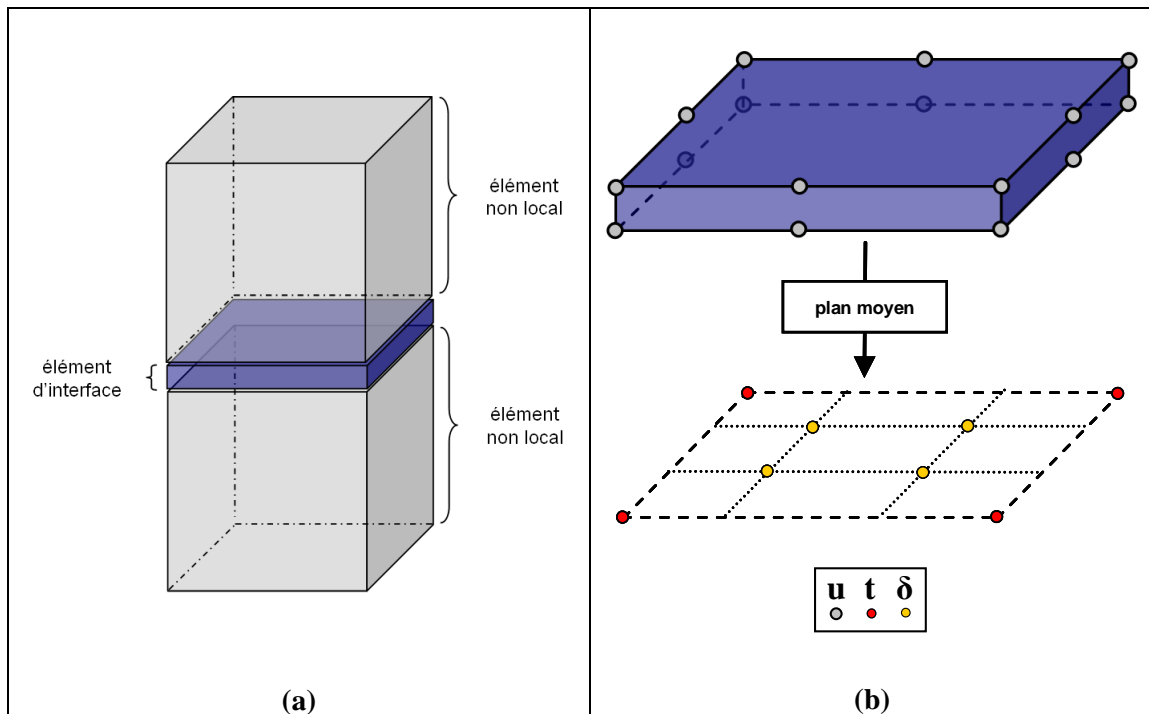
*Plaque trouée : cartes d'endommagement à quatre instants de calcul reportées sur la configuration déformée (facteur d'amplification = 800), pour  $h = 2D/12$  et  $a_{cr} = 0.5$ .*



On effectue ensuite une troisième simulation avec l'approche couplée, pour laquelle on fixe le paramètre d'endommagement critique à  $a_{cr} = 0.5$ . D'un point de vue qualitatif, on observe bien sur les cartes d'endommagement de la Figure 3 - 13 la propagation simultanée dans chaque ligament d'une fissure cohésive précédée par une *process zone* non locale. On s'assure également que l'endommagement n'évolue pas dans la structure au-delà de sa valeur critique. D'un point de vue quantitatif, la courbe force – déplacement obtenue avec notre approche est en très bon accord avec celles des modèles non locaux et cohésifs, puisqu'elle se situe entre ces dernières tout au long du premier snap-back. Cependant, des problèmes de convergence ne permettent pas de faire aboutir le calcul jusqu'à la rupture complète des ligaments (voir Figure 3 - 13 pour le dernier pas de temps convergé). Nous n'avons pu y remédier jusqu'à présent, ainsi le problème de fissure débouchant sur un bord de la structure reste ouvert.

## 4 Vers une extension tridimensionnelle

Cette section a pour but de montrer la capacité de notre approche à traiter des problèmes tridimensionnels. Une extension directe de la méthode détaillée au chapitre 2, § 3.2, a été réalisée en dimension trois afin de modéliser la propagation de fissures planes en mode d'ouverture. Elle ne nécessite que peu d'ajustements dans la mesure où l'on se restreint à l'utilisation d'un maillage structuré hexaédrique dans la bande de localisation (voir Figure 3 - 14 (a)). L'interface est alors maillée avec des hexaèdres dégénérés d'épaisseur nulle portant l'élément fini cohésif détaillé à la Figure 3 - 14 (b).



**Figure 3 - 14**

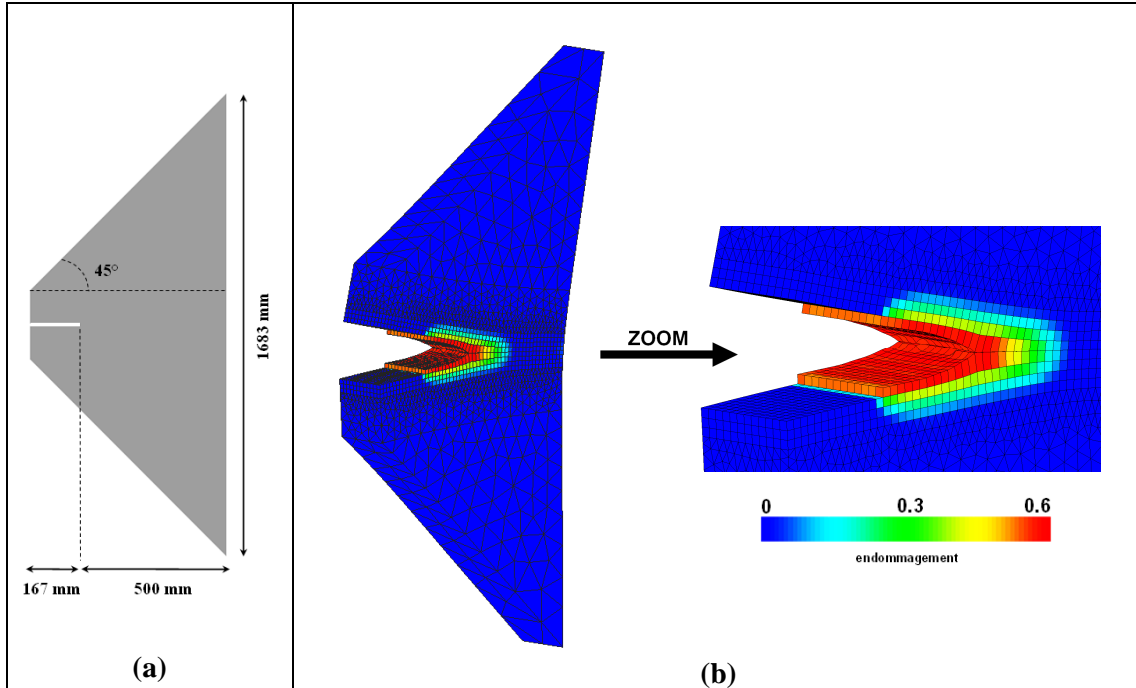
(a) éléments non locaux directement voisins d'un élément d'interface ; (b) élément d'interface hexaédrique à 20 nœuds et 4 points de Gauss.

Toutes les étapes détaillées pour le cas bidimensionnel sont alors réalisées de la même manière en les adaptant aux éléments hexaédriques : recherche des points de Gauss plus proches voisins dans le massif, évaluation du critère en chaque point d'intégration cohésif, activation d'un élément d'interface si au moins un de ses quatre points de Gauss vérifie le critère, affectation d'un comportement élastique linéaire dans ses voisins non locaux, et condition de liaison imposée pour les degrés de liberté  $u$  et  $\lambda$  relatifs aux nœuds sommets coïncidents de l'interface cohésive adhérente.

### Comparaison 2D/3D

Un premier résultat est obtenu sur l'éprouvette DCB étudiée précédemment : comme les calculs 3D sont plus coûteux en termes de temps de calcul, les dimensions de l'éprouvette initiale

ont été considérablement réduites (voir Figure 3 - 15 (a)) afin de garder une certaine marge pour l'épaisseur d'extrusion  $e$  fixée ici à  $e = 150$  mm. Ces dimensions réduites permettent alors de choisir un maillage relativement raffiné au voisinage de l'interface cohésive (hexaèdres de taille  $h = 2D/8$ ), ce qui conduit à un problème de taille relativement importante pour ce premier test (environ 261 000 degrés de liberté). Comme dans le cas bidimensionnel, le chargement appliqué consiste en un déplacement d'ouverture, imposé cette fois sur chacune des faces situées dans le plan normal au bord de l'entaille.



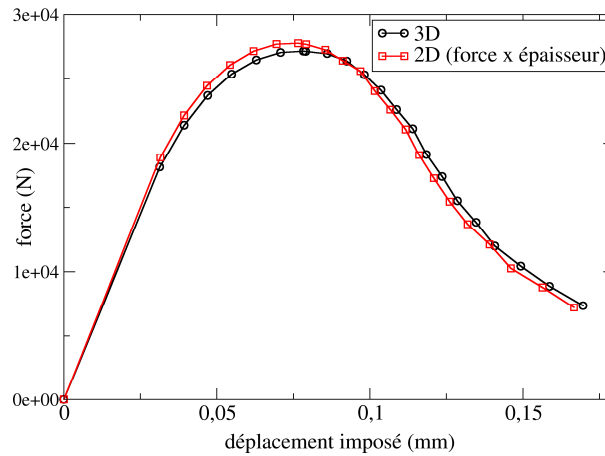
**Figure 3 - 15**

(a) dimensions de l'éprouvette 3D, extrusion de 150 mm dans la direction normale au plan ;  
 (b) carte d'endommagement reportée sur la configuration déformée pour  $h = 2D/8$  et  $a_{cr} = 0.6$ .

Une carte d'endommagement reportée sur la configuration déformée (amplifiée) de l'éprouvette, extraite d'une simulation menée avec un endommagement critique  $a_{cr} = 0.6$  est présentée à la Figure 3 - 15 (b). Elle correspond à un pas de temps suffisamment ultérieur à l'activation des premiers éléments d'interface pour que l'avancée de la fissure cohésive au sein de la bande endommagée puisse être constatée. On s'assure également que l'endommagement n'excède pas sa valeur critique au cours de la propagation. Il apparaît de plus que la forme du front de fissure n'est pas tout à fait rectiligne (contrairement à celle du fond d'entaille) et que ce dernier semble plus avancé au cœur de l'éprouvette. En effet l'ouverture des éléments cohésifs intervient plus tôt à cœur puisqu'il y règne un état de déformations planes : la distribution spatiale du champ d'endommagement dans le plan de l'interface est alors courbe et les points situés au cœur de la structure atteignent l'endommagement critique plus tôt qu'en peau. L'épaisseur de l'éprouvette reste cependant trop faible pour mettre clairement en évidence ces effets tridimensionnels, c'est ce que nous essayerons de simuler au cours de l'étude suivante.

Enfin, afin d'apporter un élément de validation supplémentaire à cette extension tridimensionnelle nous réalisons, tous paramètres égaux par ailleurs, cette même simulation sur la géométrie bidimensionnelle de la Figure 3 - 15 sous l'hypothèse de déformations planes. Les

réponses force – déplacement obtenues en 2D et en 3D sont comparées à la Figure 3 - 16, en multipliant la force relevée en 2D par l'épaisseur de l'éprouvette : un très bon accord est observé.



**Figure 3 - 16**

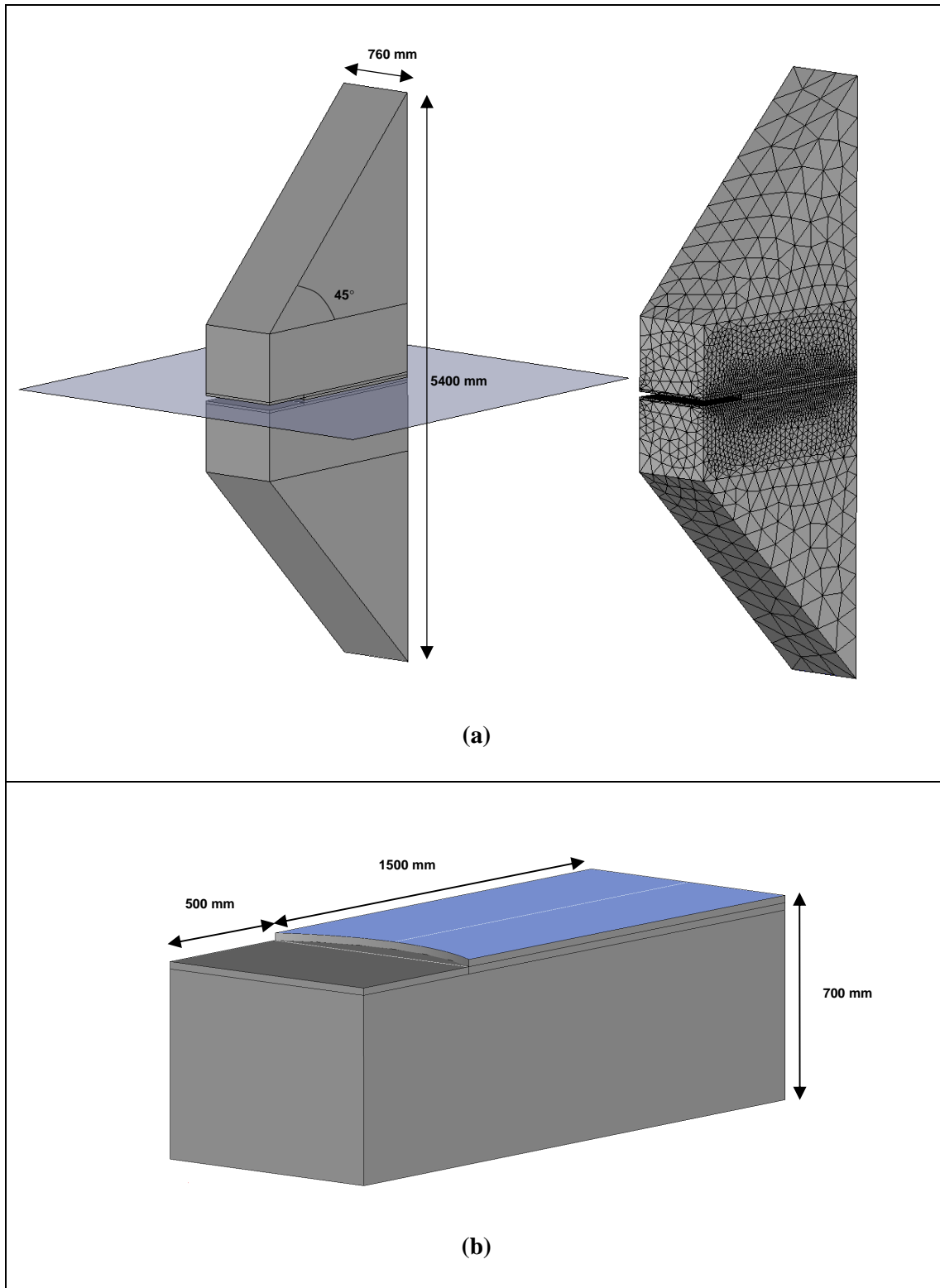
*DCB trapézoïdale : comparaison des courbes forces déplacement obtenues en 3D et en 2D.*

### Modélisation de la propagation d'un front de fissure courbe

On souhaite ici voir dans quelle mesure l'extension directe de notre approche aux situations 3D permet de modéliser la propagation d'un front courbe de fissure (cohésive). La structure étudiée est représentée à la Figure 3 - 17, il s'agit de la même éprouvette DCB mais ses dimensions ont été augmentées par rapport à celles du paragraphe précédent de telle sorte que la longueur du ligament initial (1500 mm) reste assez grande devant la taille de la *process zone*, et que l'épaisseur d'extrusion ( $e = 760$  mm) soit suffisante pour observer un front courbe au cours de la propagation. La géométrie du fond d'entaille est également modifiée dans ce sens : elle n'est plus rectiligne mais donnée par un arc de cercle rentrant dans la matière, ce qui conduit à une interface cohésive concave (voir Figure 3 - 17 (b)). Nous choisissons de plus d'augmenter la valeur du coefficient de poisson, alors fixée à  $\nu = 0.4$ , afin d'accentuer l'écart entre l'état de déformations planes au cœur de l'éprouvette et l'état de contraintes planes en surface, les autres paramètres matériaux conservent quant à eux leurs valeurs initiales données au Tableau 3 - 1.

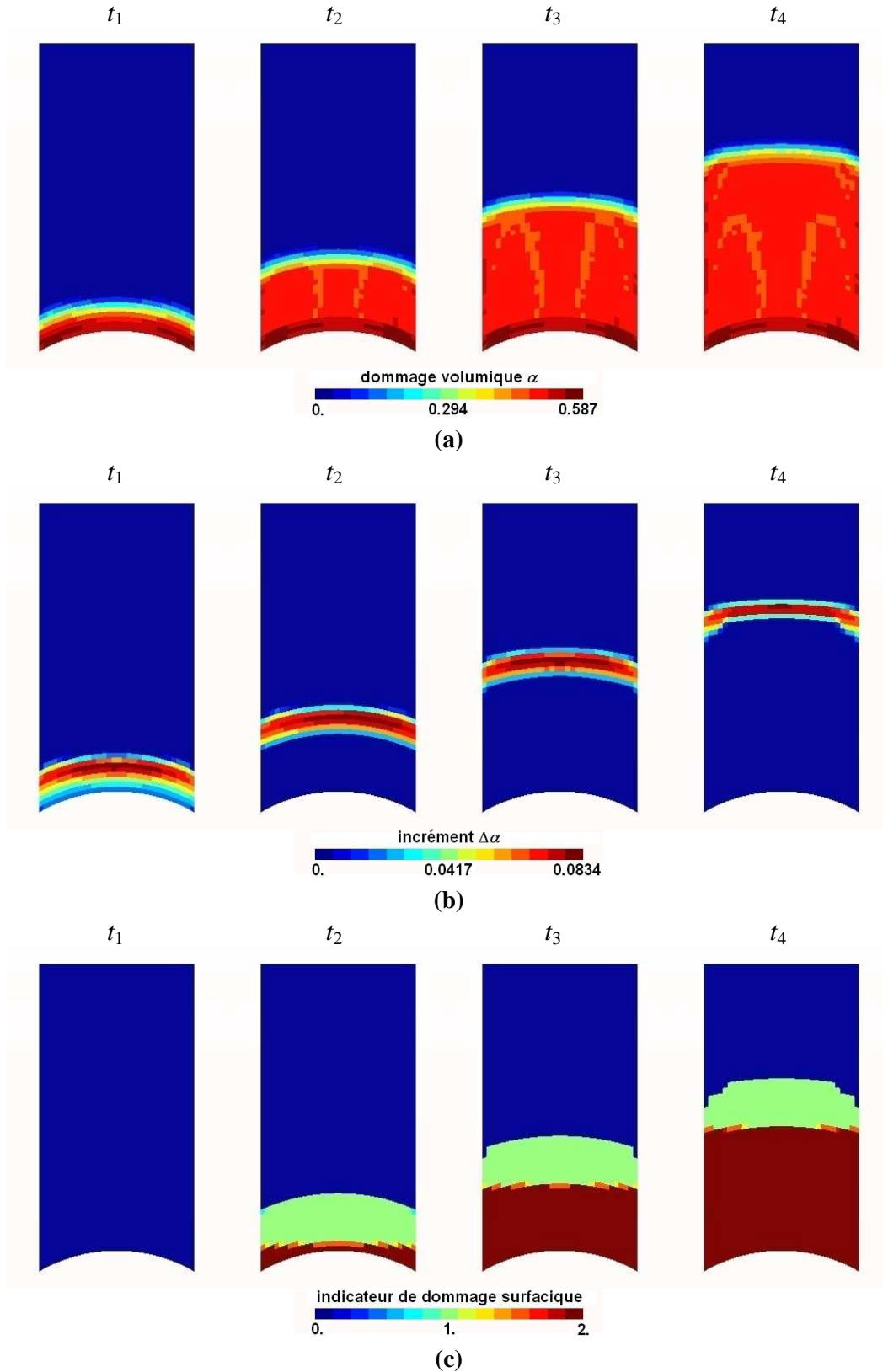
Les dimensions importantes de l'éprouvette nous contraignent à adopter une discrétisation moins fine qu'au paragraphe précédent, nous choisissons donc la résolution minimale acceptable (à notre sens) soit une taille de maille fixée à  $h = 2D/4$ , ce qui conduit tout de même à un problème de grande taille (environ 530 000 degrés de liberté).

Les résultats de cette simulation réalisée avec  $a_{cr} = 0.6$  sont présentés à la Figure 3 - 18 sous la forme de carte de variables internes extraites à quatre pas de temps distincts le long de plans de coupe coïncident ou parallèle à l'interface cohésive selon la quantité relevée. Les cartes des Figures (a) et (b) correspondent respectivement à l'endommagement  $\alpha$  et à son incrément  $\Delta\alpha$  aux points de Gauss de la couche d'hexaèdres située directement au dessus de l'interface cohésive, et la Figure (c) à l'indicateur d'endommagement des points de Gauss de l'interface cohésive pouvant prendre les valeurs entières 0 (sain), 1 (endommagement surfacique partiel) ou 2 (endommagement surfacique total).



**Figure 3 - 17**

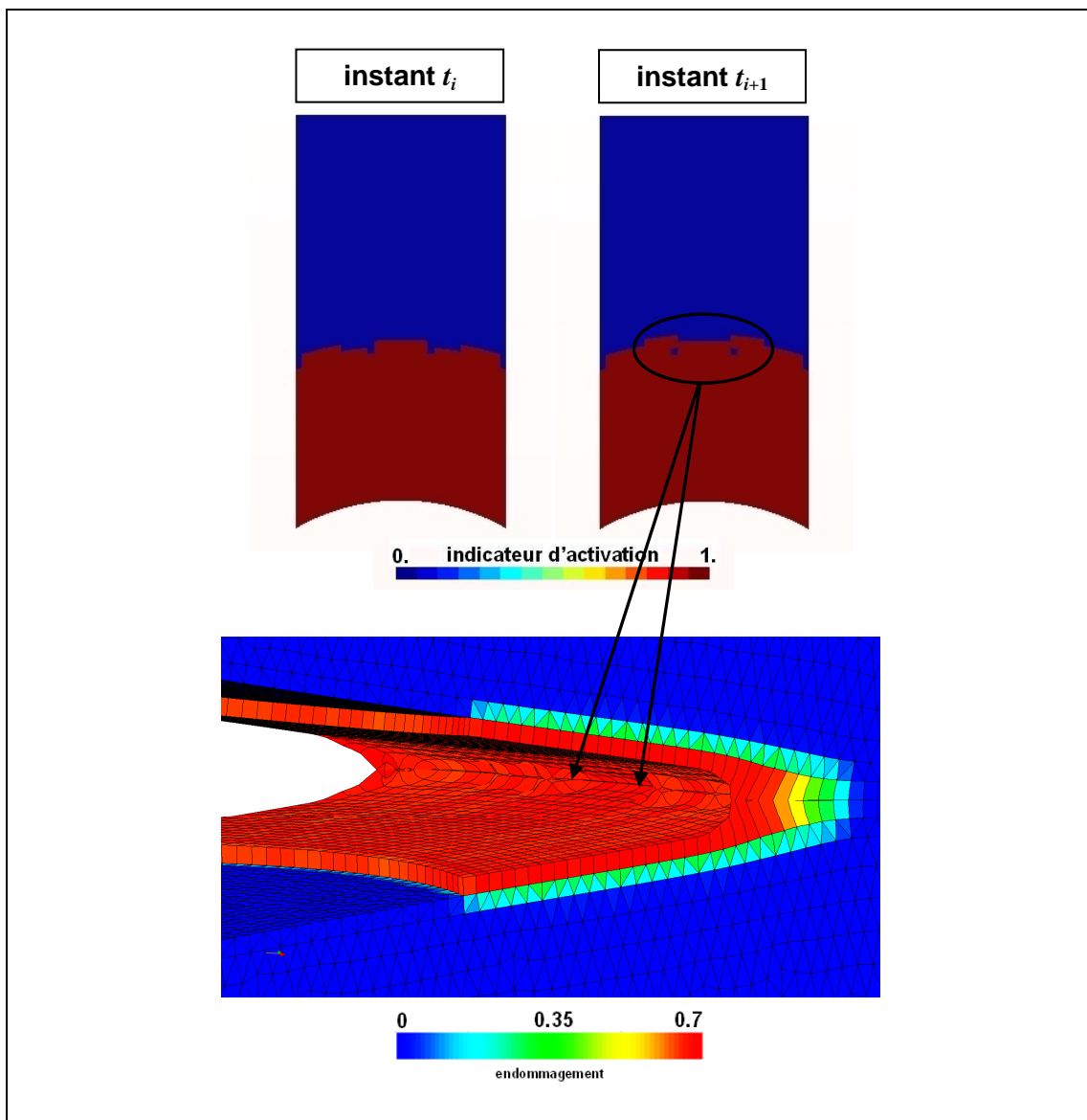
*(a) géométrie et maillage de l'éprouvette ; (b) détail de la géométrie de la partie centrale inférieure (localisation de l'interface cohésive en bleu).*



**Figure 3 - 18**

À quatre instants de calcul : (a) cartes de dommage volumique et (b) d'incrément aux points de Gauss situés directement au dessus de l'interface cohésive ; (c) d'indicateur d'endommagement surfacique (0 sain, 1 dommage partiel, 2 dommage total) aux points de Gauss de l'interface.

On observe tout d'abord sur les Figures (a) et (b) la propagation d'un front endommagé dont la courbure tend à diminuer à mesure qu'il se rapproche du fond de l'entaille. La Figure (b) permet de visualiser la *process zone* non locale ( $\Delta\alpha > 0$ ), et également de s'assurer qu'aucun élément fini situé en aval de cette dernière n'a été oublié lors de l'opération qui consiste à bloquer l'évolution de  $\alpha$  lorsque le critère est dépassé. La carte d'indicateur d'endommagement surfacique de la Figure (c) permet alors de confirmer que tous les éléments cohésifs sont bien activés en aval de la *process zone* non locale et commencent à s'ouvrir juste derrière celle-ci : le front de fissure cohésive reproduit alors naturellement cette géométrie courbe. Enfin, la Figure (c) fournit un moyen de visualiser la *process zone* cohésive alors définie comme la région du plan où l'indicateur vaut 1 (endommagement partiel). Comme cela a été observé pour les simulations bidimensionnelles, la taille de cette *process zone* reste constante au cours de la propagation dès lors qu'elle s'est complètement installée, définissant ainsi un régime de propagation stationnaire.



**Figure 3 - 19**

(a) indicateur d'activation des éléments d'interface à deux instants successifs  $t_i$  et  $t_{i+1}$  ;  
 (b) carte d'endommagement en  $t_{i+1}$ .

Si ces premiers résultats tridimensionnels sont très encourageants, il n'en reste pas moins que l'extension directe de notre approche telle qu'elle a été développée en dimension deux peut montrer certaines limitations et doit encore gagner en robustesse. En effet, parmi toutes les simulations qui ont été réalisées sur l'étude présentée au paragraphe précédent, nous nous sommes aperçus que dans certains cas le critère d'activation des éléments cohésifs pouvait être vérifié de façon discontinue sur l'interface cohésive. Plus précisément, à la fin d'un pas de temps convergé, certains éléments d'interface ne sont pas activés alors qu'ils se retrouvent « encerclés » par d'autres éléments cohésifs qui eux, sont activés. La Figure 3 - 19 correspondant à un calcul qui a été mené en ne modifiant que la valeur de l'endommagement critique, ici fixée à  $a_{cr} = 0.7$ , illustre bien ce problème. Deux cartes d'indicateur d'activation des éléments d'interface (valant 0 pour un élément en état d'adhérence forcée ou 1 s'il est activé) relatives à deux instants successifs y sont rapportées. On constate que la mise à jour du statut des éléments cohésifs réalisée à la fin de l'instant  $t_i$  conduit à une définition continue de la zone active de l'interface, tandis qu'après l'instant  $t_{i+1}$  on se trouve en présence de deux « trous », dus à la non vérification (à quelques décimales près) du critère d'activation dans le voisinage volumique de ces deux éléments. L'état d'adhérence forcée leur étant alors imposé au cours du pas de temps suivant entraîne une mise en échec de la convergence du calcul.

Ainsi, il conviendrait d'ajouter des conditions supplémentaires au déclenchement de l'activation d'un élément d'interface. Une première piste pourrait consister à utiliser le critère  $\alpha_0 \geq a_{cr}$  comme cela a été fait jusqu'à présent, et une fois cette opération réalisée, passer en revue tous les éléments inactifs et examiner le statut de chacun de leurs voisins par arrête appartenant à l'interface (au plus huit pour des hexaèdres). Cependant, travailler à partir de cette information élémentaire nécessite de distinguer trop de cas particulier (élément situé au bord ou dans un coin de l'interface, élément partiellement « entouré » et situé sur le « vrai » front de fissure cohésive...), ne permet pas une programmation générique et nous semble manquer de robustesse dès lors que l'on abandonne l'hypothèse d'un maillage structuré de l'interface.



# Conclusion générale

---

L'objectif de cette thèse était de proposer une approche continue / discontinue permettant de simuler par la méthode des éléments finis l'amorçage et la propagation de fissures dans des structures constituées d'un matériau quasi-fragile. Une part importante du travail a été consacrée à l'étude du transfert d'énergie entre un modèle d'endommagement régularisé et un modèle de zone cohésive, et à la démonstration de la pertinence de l'approche dans des cas bidimensionnels et tridimensionnels de propagation de fissures.

Dans un premier temps nous nous sommes intéressés séparément aux modèles continus et discontinus de fissuration, en évaluant sur une étude bidimensionnelle simple la cohérence entre un modèle de Griffith, un modèle de zone cohésive, et un modèle non local à gradient d'endommagement. En jouant sur la forme de la loi cohésive et en conservant tous les paramètres matériaux égaux par ailleurs, on a montré qu'un bon accord pouvait être obtenu entre le modèle cohésif et le modèle d'endommagement continu tant en terme de réponse globale que de description locale de la fissure (taille des *process zones*). Cependant, la nature continue du modèle d'endommagement ne permettant pas une description cinématique satisfaisante dès lors que l'on souhaite accéder à des informations telles que l'ouverture de fissure, cela a confirmé l'intérêt de passer à une approche continue / discontinue.

Nous avons ensuite développé une approche continue / discontinue dans un cadre semi-analytique et unidimensionnel. En prenant le modèle d'endommagement régularisé pour référence, nous avons d'abord cherché à déterminer et comparer le plus précisément possible les solutions localisées obtenues avec deux formulations non locales : une à gradient d'endommagement et l'autre à gradient implicite portant sur la déformation. Cette comparaison nous a amené à retenir la formulation à gradient d'endommagement en tant que modèle de référence dans la mesure où elle semble plus apte à modéliser de façon convenable la rupture d'un matériau quasi-fragile (principalement car le problème « d'étalement » de la bande de localisation n'apparaît pas avec ce type de formulation). À partir de cette solution de référence, nous avons proposé une méthode permettant de construire une loi cohésive énergétiquement équivalente au modèle non local. On a ensuite montré que lorsque l'on souhaite effectuer le passage d'un état d'endommagement localisé et partiel (strictement inférieur à 1) à l'ouverture d'une interface cohésive dans ce même milieu dégradé, cette loi cohésive équivalente constitue une courbe maîtresse dont se déduit une loi cohésive dite « de transition » permettant de préserver parfaitement l'équivalence énergétique avec le modèle de référence.

Afin d'étendre cette méthodologie à de véritables cas de propagation de fissure, nous avons ensuite proposé un algorithme de couplage explicite (dans le sens où il est mis en œuvre à la fin de chaque pas de temps convergé) valable pour des trajets de fissuration rectilignes en 2D (et plans en 3D) et pour des conditions de chargement en mode I. Un critère basé sur le dépassement d'une

valeur critique de l'endommagement, pouvant *a priori* être choisie quelconque dans l'intervalle  $]0,1[$ , permet d'autoriser localement l'ouverture d'éléments d'interface disposés au préalable le long du trajet de fissuration. Ces éléments dissipent alors la part d'énergie qui aurait été consommée jusqu'à endommagement total dans leur voisinage volumique direct. Les lois cohésives permettant ce passage sont alors construites dynamiquement au cours de la propagation en s'appuyant sur les relations obtenues dans l'étude unidimensionnelle. L'implémentation de cette méthode a été réalisée dans *Code\_Aster*, en s'appuyant notamment sur un élément mixte à gradient de variable interne pour la partie volumique non locale, et sur un élément mixte d'interface permettant un traitement exact des conditions d'adhérence et de contact pour la partie cohésive (pas de régularisation de l'énergie de surface).

Après avoir validé ces développements sur un cas-test simple d'ouverture de fissure, l'approche continue / discontinue a été testée sur plusieurs cas de propagation de fissure. Lors des simulations menées avec cette stratégie, trois niveaux de description de la fissure coexistent : une *process zone* dans laquelle se développe l'endommagement volumique (située en amont de la pointe de fissure cohésive), une *process zone* cohésive, et une surface libre de toutes forces de cohésion (matériau rompu). Dans le cas d'une propagation stable en dimension 2, une étude de sensibilité au paramètre d'endommagement critique a été menée. Les résultats ne montrent qu'une très faible dépendance à ce paramètre en termes de réponse globale (due à l'écart intrinsèque entre les modèles non locaux et cohésifs en dimension deux et trois), et la description des *process zone* reste cohérente avec celle de ces modèles continus et discontinus seuls. De plus, on a pu constater que la non linéarité supplémentaire issue de l'insertion d'incrément de fissure cohésive ne venait pas dégrader la convergence de l'algorithme de Newton. Nous avons ensuite évalué cette approche dans le cas de la propagation brutale et simultanée de deux fissures (test de la plaque trouée) : le recours à une méthode de pilotage du chargement portant sur l'incrément d'endommagement volumique permet d'obtenir des résultats très satisfaisants pour une analyse quasi-statique (suivi de snap-back), comparables à ceux obtenus séparément avec les modèles continus ou discontinus seuls. Enfin, nous avons montré la possibilité d'étendre notre approche à des cas 3D de fissuration plane, en validant tout d'abord cette extension par une comparaison des résultats avec une simulation 2D en déformations planes, et en montrant ensuite sa capacité à simuler la propagation d'un front de fissure courbe.

Si les résultats obtenus nous paraissent très encourageants, ils présentent inévitablement certaines limitations que nous n'avons pu traiter pendant ces trois années de thèse, et qui ouvrent la voie à de nombreuses perspectives.

La première amélioration à apporter concerne la détection du trajet de fissuration, puisque les cas traités reposaient sur l'hypothèse que ce dernier était connu, ce qui nous a permis de disposer les éléments cohésifs au préalable dans la discrétisation. Une première étape consisterait, toujours sous les mêmes hypothèses, à les insérer dynamiquement à mesure que le critère de dépassement de l'endommagement critique est vérifié. Comme nous l'avons précisé en introduction de ce mémoire, cette thèse s'inscrit en complémentarité de celle de Feld-Payet [Feld-Payet, 2010] dont l'un des objectifs était de développer une méthode d'insertion de fissures dans un maillage sain par une méthode de remaillage, en s'appuyant sur la distribution spatiale du champ d'endommagement régularisé. En localisant les maxima du champ d'endommagement préalablement lissé, un maillage surfacique auxiliaire est étendu sur le lieu où ce champ excède sa valeur critique. La détermination de l'intersection entre ce maillage surfacique auxiliaire et le maillage volumique de calcul permet, après remaillage, de prendre explicitement en compte l'incrément de fissure correspondant. Ces

travaux constituent une piste de travail qui, comme nous l'avons souligné au chapitre 2, § 1.3, nous semble plus adaptée qu'une discrétisation des discontinuités par la méthode X-FEM dans le cas où le modèle non local repose sur l'élément fini mixte à gradient d'endommagement. Cependant, quelque soit le choix de la méthode de discrétisation des discontinuités, le problème du transfert des champs consécutif à l'insertion d'un incrément de fissure reste un point délicat.

Ensuite, afin de rendre cette méthode plus performante en vue d'applications industrielles, une autre piste d'amélioration réside dans le recours à une méthode de maillage adaptatif afin de gagner en temps de calcul. On a vu que le niveau de raffinement requis pour décrire la process zone avec une précision suffisante est plus élevé pour le modèle d'endommagement non local que pour le modèle cohésif. De plus, les modèles non locaux sont bien plus coûteux en temps CPU que les modèles cohésifs. En utilisant un critère de raffinement basé sur le taux d'endommagement, il serait possible de raffiner la process zone non locale au cours de sa propagation, et de déraffiner les zones voisines de l'interface cohésive lorsque celle-ci est totalement rompue.

Enfin, l'approche que nous avons proposée n'est valable que pour des propagations de fissures en mode I. Il conviendrait dans un premier temps de la valider expérimentalement en la confrontant à des résultats d'essais correspondant à ce type de situations, ce qui pourrait nécessiter une extension à des relations de comportement plus réalistes (et nécessairement plus complexes, notamment dans le cas du béton). Pour rendre cette approche plus générique, il serait ensuite intéressant d'envisager une méthode d'indentification de loi cohésive équivalente pour les autres modes de fissuration (II et III) considérés séparément, comme cela a été fait pour le mode I lors de l'étude unidimensionnelle du chapitre 2. Une fois ces lois cohésives identifiées, l'extension aux propagations de fissure en mode mixte supposerait de pouvoir déterminer à la fin de chaque pas de temps la part d'énergie dissipée par le modèle non local selon chacun des modes de fissuration.



# Annexes

---

1 Annexe 1 : EF mixte non local à gradient d'endommagement dans <i>Code_Aster</i> .....	134
1.1 Rappel de la formulation mixte continue et semi – discrétisée en temps .....	134
1.2 Discrétisation.....	135
1.3 Intégration du comportement .....	135
1.4 Résolution globale.....	138
1.5 Choix des éléments finis .....	139
2 Annexe 2 : EF mixte d'interface pour les CZM dans <i>Code_Aster</i> .....	141
2.1 Rappel de la formulation mixte continue semi – discrétisée en temps.....	141
2.2 Discrétisation.....	141
2.3 Intégration du comportement .....	142
2.4 Résolution globale.....	142
2.5 Choix des éléments finis .....	143

---

# 1 Annexe 1 : EF mixte non local à gradient d'endommagement dans *Code\_Aster*

Cette annexe a pour but de présenter l'élément fini mixte non local à gradient d'endommagement tel qu'il est implanté dans le *Code\_Aster*. Elle s'inspire très largement de la documentation [D.A. R5.04.01] ainsi que de la publication [Lorentz et Godard, 2011].

## 1.1 Rappel de la formulation mixte continue et semi – discrétisée en temps

On rappelle ici l'expression de la formulation continue en espace, après discrétisation temporelle par un schéma d'Euler implicite (voir chapitre 1, § 1.5.3). La minimisation de l'énergie potentielle de la structure revient à trouver, à la fin de chaque pas de temps  $[t^n, t^{n+1}]$ , le point selle du lagrangien augmenté suivant :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}^{n+1}, a^{n+1}, \lambda^{n+1}, \alpha^{n+1}) \text{ réalisant } \min_{\mathbf{u}} \min_a \max_{\lambda} \min_{\alpha} [\mathcal{L}_r(\mathbf{u}, a, \lambda, \alpha)] ; \\ & \text{avec } \mathcal{L}_r(\mathbf{u}, a, \lambda, \alpha) = \int_{\Omega} \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) d\Omega - W_{\text{ext}}(\mathbf{u}) + \int_{\Omega} \frac{c}{2} (\nabla a)^2 d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega} \lambda (a - \alpha) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{r}{2} (a - \alpha)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A - 1})$$

où  $\Pi$  est définie comme :

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) = \Phi^{\text{loc}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha) + \Delta t \Psi\left(\frac{\alpha - \alpha^n}{\Delta t}\right) \quad (\text{A - 2})$$

Les conditions d'optimalité d'un point-selle  $(\mathbf{u}, a, \lambda, \alpha)$  de  $\mathcal{L}_r$  s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \forall \delta \mathbf{u} \in KA^0, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = W_{\text{ext}}(\delta \mathbf{u}), \quad \text{où } \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi^{\text{loc}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) ; \\ \text{ii)} \quad & \forall \delta a \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} c \nabla a \cdot \nabla \delta a d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \delta a d\Omega + \int_{\Omega} r (a - \alpha) \delta a d\Omega = 0 ; \\ \text{iii)} \quad & \forall \delta \lambda \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} (a - \alpha) \delta \lambda d\Omega = 0 ; \\ \text{iv)} \quad & \forall x \in \Omega, \quad \lambda(x) + r(a(x) - \alpha(x)) \in \partial_{\alpha} \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}(x), \alpha(x)) \end{aligned} \quad (\text{A - 3})$$

où  $KA^0$  désigne l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissible à 0. L'équation (A - 3) iv) correspond en fait à la relation de comportement écrite en un point matériel  $x$ .

Cette relation d'appartenance peut encore s'écrire, d'après la définition de  $\Pi$  (A - 2), en faisant intervenir la force thermodynamique locale associée à  $\alpha$  et le potentiel de dissipation  $\Psi$  :

$$-\frac{\partial \Phi^{\text{loc}}}{\partial \alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}(x), \alpha(x)) + \lambda(x) + r(a(x) - \alpha(x)) \in \partial \Psi \left( \frac{\alpha(x) - \alpha^n(x)}{\Delta t} \right) \quad (\text{A - 4})$$

La force thermodynamique locale est donc corrigée par une perturbation affine  $-r\alpha + \lambda + ra$  issue de l'énergie de régularisation, ce qui lui confère un caractère non local. Nous adopterons par la suite la notation suivante pour cette force thermodynamique non locale :

$$Y^{\text{nonloc}}(\boldsymbol{\varepsilon}, a, \lambda, \alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} -\frac{\partial \Phi^{\text{loc}}}{\partial \alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) + \lambda + r(a - \alpha) \quad (\text{A - 5})$$

---

## 1.2 Discrétisation

Les champs de déplacement  $\mathbf{u}$ , d'endommagement  $a$ , et de multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  sont discrétisés par des fonctions de formes continues, ce qui s'écrit avec les notations matricielles classiques :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \mathbf{N}^u(x) \cdot \mathbf{U} ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{B}^u(x) \cdot \mathbf{U} \\ a(x) &= \mathbf{N}^a(x) \cdot \mathbf{A} ; \quad \nabla a(x) = \mathbf{B}^a(x) \cdot \mathbf{A} \\ \lambda(x) &= \mathbf{N}^\lambda(x) \cdot \mathbf{L} \end{aligned} \quad (\text{A - 6})$$

avec  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{A}$ , et  $\mathbf{L}$  les vecteurs contenant les inconnues nodales correspondant respectivement à  $\mathbf{u}$ ,  $a$ , et  $\lambda$ . La discrétisation du champ d'endommagement auxiliaire  $\alpha$  est quant à elle réalisée en des points de collocation  $x_g$  coïncidant avec les points d'intégrations de la méthode de quadrature choisie (l'indice  $g$  désignant les points de Gauss) pour mener l'intégration numérique :

$$\alpha(x_g) = \alpha_g \quad (\text{A - 7})$$

la méthode de quadrature s'écrit, pour toute fonction  $f$  :

$$\int_{\Omega} f(x) d\Omega \approx \sum_g w_g f_g ; \quad \text{où} \quad f_g = f(x_g) \quad (\text{A - 8})$$

---

## 1.3 Intégration du comportement

### 1.3.1 Cas général

La relation de comportement est intégrée aux points de Gauss  $x_g$ , lorsque les inconnues nodales  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{A}$ , et  $\mathbf{L}$  sont déterminées. Les champs de déformation, d'endommagement, et de multiplicateur de Lagrange s'expriment en  $x_g$  d'après les relations (A - 6) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_g &= \mathbf{B}_g^u \cdot \mathbf{U} \\ a_g &= \mathbf{N}_g^a \cdot \mathbf{A} \\ \lambda_g &= \mathbf{N}_g^\lambda \cdot \mathbf{L}\end{aligned}\tag{A - 9}$$

Il s'agit alors, connaissant la valeur  $\alpha_g^n$  du champ d'endommagement auxiliaire à l'instant précédent d'en déterminer la valeur courante  $\alpha_g$ . L'évolution de ce champ d'endommagement est donnée par la condition (A - 4) d'appartenance de la force thermodynamique non locale au sous-différentiel du potentiel de dissipation  $\Psi$ , ce qui d'après (A - 5) s'écrit en  $x_g$  :

$$Y^{\text{nonloc}}(\boldsymbol{\varepsilon}_g, a_g, \lambda_g, \alpha_g) \in \partial \Psi \left( \frac{\alpha_g - \alpha_g^n}{\Delta t} \right)\tag{A - 10}$$

La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_g$  garde sa signification locale d'après (A - 3) i), et est obtenue par dérivation de la densité d'énergie libre locale par rapport à la déformation, une fois  $\alpha_g$  déterminé :

$$\boldsymbol{\sigma}_g = \frac{\partial \Phi^{\text{loc}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}_g, \alpha_g)\tag{A - 11}$$

Il reste alors à déterminer les quantités suivantes, nécessaires au calcul de la matrice de correction tangente, comme nous le verrons par la suite dans les relations (A - 26) et (A - 27) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \frac{\partial \alpha_g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \frac{\partial \alpha_g}{\partial a} \text{ et } \frac{\partial \alpha_g}{\partial \lambda}\tag{A - 12}$$

### 1.3.2 Application à la loi d'endommagement fragile

On se place dans le cas de la loi d'endommagement fragile utilisée dans les chapitres 1, 2, et 3 du mémoire. Elle est caractérisée par la densité d'énergie libre locale :

$$\begin{aligned}\Phi^{\text{loc}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) &= A(\alpha)w(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \text{avec } w(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{et} \quad A(\alpha) = \left( \frac{1 - \alpha}{1 + \gamma \alpha} \right)^2\end{aligned}\tag{A - 13}$$

et le potentiel de dissipation :

$$\Psi(\dot{\alpha}) = k\dot{\alpha} + I_{R^+}(\dot{\alpha})\tag{A - 14}$$



Avec le choix de (A - 14), la relation (A - 10) d'appartenance au sous-différentiel de  $\Psi$  peut être reformulée en termes de condition de cohérence portant sur la fonction de charge associée :

$$Y^{\text{nonloc}} - k \leq 0 ; \quad \alpha_g - \alpha_g^n \geq 0 ; \quad (Y^{\text{nonloc}} - k)(\alpha_g - \alpha_g^n) = 0 \quad (\text{A - 15})$$

(A - 15) permet de déterminer l'endommagement  $\alpha_g$  de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{si } Y^{\text{nonloc}}(\boldsymbol{\varepsilon}_g, a_g, \lambda_g, \alpha_g) - k \leq 0 \text{ alors } \alpha_g = \alpha_g^n \\ \text{sinon trouver } \alpha_g \geq \alpha_g^n \text{ tel que } Y^{\text{nonloc}}(\boldsymbol{\varepsilon}_g, a_g, \lambda_g, \alpha_g) - k = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A - 16})$$

Dans le cas où l'endommagement évolue,  $\alpha_g$  est solution de l'équation scalaire suivante :

$$-A'(\alpha_g)w(\boldsymbol{\varepsilon}_g) - r\alpha_g = k - \lambda_g + ra_g \quad (\text{A - 17})$$

et comme le facteur de rigidité  $A(\alpha)$  choisi en (A - 13) a pour dérivée :

$$-A'(\alpha) = 2(1 + \gamma) \frac{(1 - \alpha)}{(1 + \gamma\alpha)^3} \quad (\text{A - 18})$$

$\alpha_g$  est l'une des racines d'un polynôme de degré quatre en  $\alpha$ , que l'on peut donc extraire analytiquement. Une fois  $\alpha_g$  déterminé, la contrainte s'exprime par simple dérivation de (A - 13) :

$$\boldsymbol{\sigma}_g = \frac{\partial \Phi^{\text{loc}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}_g, \alpha_g) = A(\alpha_g) \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}_g \quad (\text{A - 19})$$

Et les dérivées (A - 12) nécessaires aux calculs de la matrice tangente sont obtenues en différentiant les relations (A - 19) et (A - 17) :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right\}_{ijkl} &= A(\alpha) E_{ijkl} - \frac{A'^2(\alpha)}{A''(\alpha) + r} \sigma_{ij}^{\text{elas}} \sigma_{kl}^{\text{elas}} ; \quad \text{où } \boldsymbol{\sigma}^{\text{elas}} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right\}_{ij} &= - \frac{A'(\alpha)}{A''(\alpha) + r} \sigma_{ij}^{\text{elas}} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial a} = \frac{1}{A''(\alpha) + r} \end{aligned} \quad (\text{A - 20})$$

l'indice  $g$  étant omis afin d'alléger les notations. La dérivée seconde du facteur de rigidité s'écrit :

$$A''(\alpha) = 2(1 + \gamma) \frac{[\gamma + 1 + 2\gamma(1 - \alpha)]}{(1 + \gamma\alpha)^4} \quad (\text{A - 21})$$

## 1.4 Résolution globale

En introduisant la discrétisation spatiale (A - 6) et la méthode de quadrature (A - 8) dans les conditions (A - 3) i) – iii), on aboutit aux expressions suivantes des vecteurs de forces internes associées respectivement aux variables nodales  $\mathbf{u}$ ,  $a$ , et  $\lambda$ . Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_g$  et la variable d'endommagement  $\alpha_g$  intervenant dans cette expression sont déterminés aux points de Gauss en intégrant la relation de comportement (paragraphe 1.3) :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{int},\mathbf{u}} &= \sum_g w_g \left[ \mathbf{B}_g^{uT} \boldsymbol{\sigma}_g \right] \\ \mathbf{F}_{\text{int},a} &= \sum_g w_g \left[ c \mathbf{B}_g^{aT} \mathbf{B}_g^a \mathbf{A} + \mathbf{N}_g^{aT} \mathbf{N}_g^a \mathbf{L} + r \mathbf{N}_g^{aT} \left( \mathbf{N}_g^a \mathbf{A} - \alpha_g \right) \right] \\ \mathbf{F}_{\text{int},\lambda} &= \sum_g w_g \left[ \mathbf{N}_g^{\lambda T} \left( \mathbf{N}_g^a \mathbf{A} - \alpha_g \right) \right] = 0\end{aligned}\tag{A - 22}$$

Il s'agit alors de résoudre le système non linéaire suivant, dont les inconnues sont les vecteurs d'inconnues nodales  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{L}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{int},\mathbf{u}}(\mathbf{U}, \mathbf{A}, \mathbf{L}) = \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{F}_{\text{int},a}(\mathbf{U}, \mathbf{A}, \mathbf{L}) = 0 \\ \mathbf{F}_{\text{int},\lambda}(\mathbf{U}, \mathbf{A}, \mathbf{L}) = 0 \end{cases}\tag{A - 23}$$

La solution de (A - 23) est déterminée de façon classique par une méthode incrémentale de type Newton-Raphson, ce qui s'écrit au pas de temps  $[t^n, t^{n+1}]$  et à l'itération de Newton  $i$  :

$$\mathbf{K}^{n+1,i} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{U}^{n+1,i+1} \\ \delta \mathbf{A}^{n+1,i+1} \\ \delta \mathbf{L}^{n+1,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int},\mathbf{u}}^{n+1,i} \\ \mathbf{F}_{\text{int},a}^{n+1,i} \\ \mathbf{F}_{\text{int},\lambda}^{n+1,i} \end{bmatrix}\tag{A - 24}$$

où  $\mathbf{K}^{n+1,i}$  désigne la matrice de correction tangente en  $(\mathbf{u}^{n+1,i}, a^{n+1,i}, \lambda^{n+1,i})^T$ , et  $\delta q^{n+1,i+1}$  l'incrément de toute quantité nodale  $q$  entre deux itérations de Newton successives, c'est-à-dire la correction itérative entre les itérations  $i$  et  $i+1$  de l'incrément total de cette quantité entre les piquets de temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$  :

$$\delta q^{n+1,i+1} = q^{n+1,i+1} - q^{n+1,i}\tag{A - 25}$$

La matrice tangente  $\mathbf{K}$  est symétrique et s'écrit de la manière suivante, en omettant les exposants relatifs aux numéros pas de temps et à d'itération de Newton :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^u}{\partial \mathbf{U}} & \text{sym.} & \text{sym.} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^a}{\partial \mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^a}{\partial \mathbf{A}} & \text{sym.} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^\lambda}{\partial \mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^\lambda}{\partial \mathbf{A}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^\lambda}{\partial \mathbf{L}} \end{bmatrix} \quad (\text{A} - 26)$$

Il suffit donc de calculer les blocs triangulaires inférieurs :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^u}{\partial \mathbf{U}} &= \sum_g w_g \left[ \mathbf{B}_g^{uT} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B}_g^u \right] \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^a}{\partial \mathbf{U}} &= \sum_g w_g \left[ -r \mathbf{N}_g^{aT} \frac{\partial \alpha_g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B}_g^u \right] \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^\lambda}{\partial \mathbf{U}} &= \sum_g w_g \left[ -\mathbf{N}_g^{\lambda T} \frac{\partial \alpha_g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B}_g^u \right] \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^a}{\partial \mathbf{A}} &= \sum_g w_g \left[ c \mathbf{B}_g^{aT} \mathbf{B}_g^a + r \left( 1 - \frac{\partial \alpha_g}{\partial a} \right) \mathbf{N}_g^{aT} \mathbf{N}_g^a \right] \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^\lambda}{\partial \mathbf{A}} &= \sum_g w_g \left[ \left( 1 - \frac{\partial \alpha_g}{\partial a} \right) \mathbf{N}_g^{\lambda T} \mathbf{N}_g^a \right] \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^\lambda}{\partial \mathbf{L}} &= \sum_g w_g \left[ -\frac{\partial \alpha_g}{\partial \lambda} \mathbf{N}_g^{\lambda T} \mathbf{N}_g^\lambda \right] \end{aligned} \quad (\text{A} - 27)$$

## 1.5 Choix des éléments finis

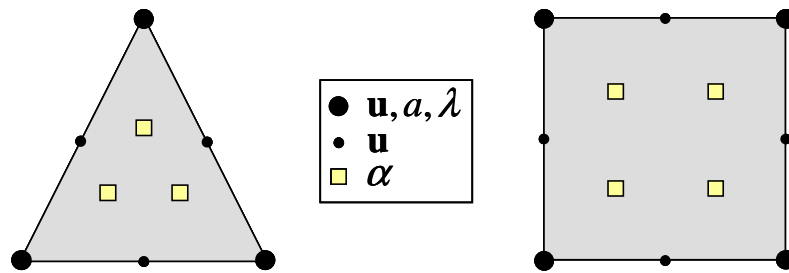


Figure A - 1

*Eléments finis mixtes non locaux à gradient d'endommagement disponibles en dimension deux.*

L'élément fini mixte résultant repose sur le choix des fonctions de formes suivantes : le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est interpolé avec des fonctions P2-continues, les champs d'endommagement nodal  $a$  et de multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  avec des fonctions P1-continues. Le champ d'endommagement auxiliaire  $\alpha$  est quant à lui interpolé avec des fonctions P1-discontinues, ce qui en dimension deux revient à une méthode de collocation sur 3 points pour le triangle, et 4

point pour le quadrangle. Ces points sont également choisis comme les points d'intégrations de la méthode de quadrature. Ces éléments sont représentés de manière schématique à la Figure A - 1.

## 2 Annexe 2 : EF mixte d'interface pour les CZM dans Code\_Aster

Cette annexe a pour but de présenter l'élément fini mixte d'interface pour les modèles de zone cohésives tel qu'il est implanté dans le *Code\_Aster*. Elle s'inspire très largement de la documentation [D.A. R3.06.13] ainsi que de la publication [Lorentz, 2008].

### 2.1 Rappel de la formulation mixte continue semi – discrétisée en temps

On rappelle ici l'expression de la formulation continue semi – discrétisée en temps (voir chapitre 2, § 3.1.2, pour les notations). La minimisation de l'énergie potentielle de la structure revient à trouver le point selle du Lagrangien augmenté suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \delta) = & \int_{\Omega \setminus \Gamma} \Phi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega + \int_{\Gamma} \Pi(\delta, \kappa) d\Gamma - W_{ext}(\mathbf{u}) \\ & + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot ([[\mathbf{u}]] - \delta) d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\Gamma} ([[\mathbf{u}]] - \delta)^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A - 28})$$

où  $\Pi(\delta, \kappa)$  désigne l'énergie de surface, et  $\kappa$  le champ de variable d'histoire mémorisant la plus grande norme du saut atteinte. Les conditions d'optimalité d'un point-selle  $(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \delta)$  de  $\mathcal{L}_r$  s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \forall \delta \mathbf{u}, \quad \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{t} + r([[\mathbf{u}]] - \delta)) \cdot [[\delta \mathbf{u}]] d\Gamma = W'_{ext}(\delta \mathbf{u}), \\ & \text{avec } \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi_{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) ; \\ \text{ii)} \quad & \forall \delta \mathbf{t}, \quad \int_{\Gamma} ([[\mathbf{u}]] - \delta) \cdot \delta \mathbf{t} d\Gamma = 0 ; \\ \text{iii)} \quad & \forall s \in \Gamma, \quad \mathbf{t}(s) + r([[\mathbf{u}]](s) - \delta(s)) \in \partial \Pi(\delta(s), \kappa(s)) \end{aligned} \quad (\text{A - 29})$$

### 2.2 Discrétisation

Les champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et de multiplicateur de Lagrange  $\mathbf{t}$  sont discrétisés par des fonctions de formes continues, ce qui s'écrit avec les notations matricielles classiques :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \Omega, \quad \mathbf{u}(x) &= \mathbf{N}^u(x) \cdot \mathbf{U} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{B}^u(x) \cdot \mathbf{U} \\
 \forall s \in \Gamma, \quad \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(s) &= \mathbf{M}^u(s) \cdot \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{N}_+^u(s) - \mathbf{N}_-^u(s)) \cdot \mathbf{U} \\
 \forall s \in \Gamma, \quad \mathbf{t}(s) &= \mathbf{N}^t(s) \cdot \mathbf{T}
 \end{aligned} \tag{A - 30}$$

avec  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{T}$  les vecteurs contenant les inconnues nodales correspondant respectivement à  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$ . La discrétisation du champ auxiliaire de saut de déplacement  $\boldsymbol{\delta}$  est quant à elle réalisée en des points de collocation  $s_g$  coïncidant avec les points d'intégrations de la méthode de quadrature choisie pour réaliser l'intégration numérique sur l'interface  $\Gamma$  :

$$\boldsymbol{\delta}(s_g) = \boldsymbol{\delta}_g \tag{A - 31}$$

La méthode de quadrature s'écrit, pour toute fonction  $f$  définie sur  $\Gamma$  :

$$\int_{\Gamma} f(s) d\Gamma \approx \sum_g w_g f_g \quad ; \quad \text{où} \quad f_g = f(s_g) \tag{A - 32}$$

---

## 2.3 Intégration du comportement

L'intégration de la loi de comportement volumique dans le domaine  $\Omega \setminus \Gamma$  est effectuée de manière habituelle tant que l'on considère un milieu continu classique, et reste complètement indépendante du comportement de l'interface cohésive  $\Gamma$ .

La loi cohésive est intégrée aux points de Gauss  $s_g$ , lorsque les inconnues nodales  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{T}$  sont déterminées. Les champs de saut de déplacement et de multiplicateur de Lagrange s'expriment en  $s_g$  d'après la relation (A - 30) :

$$\begin{aligned}
 \llbracket \mathbf{u}_g \rrbracket &= \mathbf{M}_g^u \cdot \mathbf{U} \\
 \mathbf{t}_g &= \mathbf{N}_g^t \cdot \mathbf{T}
 \end{aligned} \tag{A - 33}$$

L'intégration de la loi cohésive revient alors à déterminer au pas de temps  $n$  le champ auxiliaire  $\boldsymbol{\delta}_g$  en fonction des données  $\llbracket \mathbf{u}_g^n \rrbracket$ ,  $\mathbf{t}_g^n$  et  $\kappa_g^{n-1}$  (variable d'histoire au pas de temps précédent). Ces quantités sont reliées par la relation (A - 29) iii) :

$$\mathbf{t}_g^n + r \left( \llbracket \mathbf{u}_g^n \rrbracket - \boldsymbol{\delta}_g^n \right) \in \partial \Pi \left( \boldsymbol{\delta}_g^n, \kappa_g^{n-1} \right) \tag{A - 34}$$

---

## 2.4 Résolution globale

En introduisant la discrétisation spatiale (A - 30) et la méthode de quadrature (A - 32) dans les conditions (A - 29) i) et ii), on aboutit aux expressions suivantes des vecteurs de forces internes

associées respectivement aux variables nodales  $\mathbf{u}$ , et  $\mathbf{t}$ . Le saut  $\delta_g$  intervenant dans ces expressions est déterminé aux points de Gauss en intégrant la relation de comportement (paragraphe 2.3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{int},\mathbf{u}} &= \int_{\Omega \setminus \Gamma} \mathbf{B}^{uT} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}) d\Omega + \sum_g w_g \mathbf{M}_g^{uT} \left( \mathbf{N}_g^t \mathbf{T} + r \mathbf{M}_g^u \mathbf{U} - r \delta_g \right) \\ \mathbf{F}_{\text{int},\mathbf{t}} &= \sum_g w_g \mathbf{N}_g^{tT} \left( \mathbf{M}_g^u \mathbf{U} - \delta_g \right) \end{aligned} \quad (\text{A - 35})$$

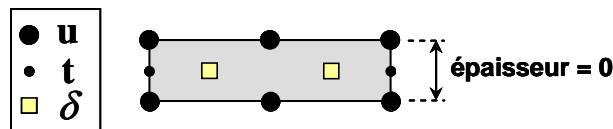
où l'intégrale de volume est calculée de manière habituelle (de même pour le vecteur nodal des efforts extérieurs intervenant dans (A - 36)) après intégration du comportement volumique. Il s'agit alors de résoudre le système non linéaire suivant, dont les inconnues sont les vecteurs d'inconnues nodales  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{T}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{int},\mathbf{u}}(\mathbf{U}, \mathbf{T}) = \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{F}_{\text{int},\mathbf{t}}(\mathbf{U}, \mathbf{T}) = 0 \end{cases} \quad (\text{A - 36})$$

La solution de (A - 36) est déterminée de façon classique par une méthode incrémentale de type Newton-Raphson

## 2.5 Choix des éléments finis

L'interface  $\Gamma$  est discrétisée au moyen de quadrangles dégénérés en dimension 2 et d'épaisseur nulle, assimilables à des segments (et par des hexaèdres ou pentaèdres dégénérés en dimension 3, assimilables à des quadrangles ou des triangles). L'élément fini mixte d'interface s'appuyant sur cette maille est représenté en dimension 2 à la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** ; il repose sur une interpolation P2 – continue du champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , P1 – continue pour le champ de force cohésive  $\mathbf{t}$ , et P1 – discontinue pour le champ auxiliaire  $\delta$ . Ce dernier choix correspond à deux points de collocation pour le segment (quadrangle dégénéré), qui sont choisis coïncidents avec les points de Gauss.



**Figure A - 2**  
*Elément fini d'interface disponible en dimension deux.*





# Bibliographie

---

**[Allix et Deü, 1997]**

O. Allix, J.F. Deü, 1997. Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions* 45, 29-46.

**[Barenblatt, 1962]**

G.I. Barenblatt, 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics* 7, 55-129.

**[Bažant et Oh, 1983]**

Z.P. Bažant, B.H. Oh, 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures* 16 (3), 155-177.

**[Bažant et al., 1984]**

Z.P. Bažant, T.B. Belytschko, T.P. Chang, 1984. Continuum theory for strain softening. *Journal of Engineering Mechanics* 110 (12), 1666–1692.

**[Benallal et al., 1993]**

A. Benallal, R. Billardon, G. Geymonat, 1993. Bifurcation and localization in rate independent materials. Some general considerations. In Q.S. Nguyen, *Bifurcation and stability of dissipative systems*, CISM n° 327, SpringerVerlag, 1-44.

**[Benallal et Marigo, 2007]**

A. Benallal, J.J. Marigo, 2007. Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 15 (1), 283-295.

**[Belytschko et Black, 1999]**

T. Belytschko, T. Black, 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (5), 601-620.

**[Bottoni et Dufour, 2010]**

M. Bottoni, F. Dufour, 2010. Topological search of the crack path from a damage-type mechanical computation. Computational Modelling of Concrete Structures (Euro-C 2010, Rohrmoos/Schladming, Austria).

**[Bourdin *et al.*, 2008]**

B. Bourdin, G. Francfort, J.J. Marigo, 2008. The variational approach to fracture. Springer.

**[Cangémi, 1997]**

L. Cangémi, 1997. Frottement et adhérence : modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice. Ph.D. thesis, Université d'Aix-Marseille 2.

**[Cazes *et al.*, 2009]**

F. Cazes, M. Coret, A. Combescure, A. Gravouil, 2009. A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures* 46 (6), 1476-1490.

**[Cazes *et al.*, 2010]**

F. Cazes, A. Simatos, M. Coret, A. Combescure, 2010. A cohesive zone model which is energetically equivalent to a gradient-enhanced coupled damage-plasticity model. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 29 (6), 976-989.

**[Chambon *et al.*, 2001]**

R. Chambon, D. Caillerie, T. Matsushima, 2001. Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: localization studies. *International Journal of Solids and Structures* 38 (46-47), 8503-8527.

**[Charlotte *et al.*, 2006]**

M. Charlotte, J. Laverne, J.J. Marigo, 2006. Initiation of cracks with cohesive force models: a variational approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 25 (4), 649-669.

**[Chiaruttini *et al.*, 2010]**

V. Chiaruttini, F. Feyel, J.L. Chaboche, 2010. A robust meshing algorithm for complex 3D crack growth simulation. IV European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2010, Paris, France).

**[Chiaruttini et Feyel, 2011]**

V. Chiaruttini, F. Feyel, 2011. An adaptive multiscale algorithm for cohesive zone model and arbitrary crack propagation. International Conference on Computational Modeling of Fracture and Failure of Materials and Structures (CFRAC 2011, Barcelona, Spain).

**[Comi *et al.*, 2007]**

C. Comi, S. Mariani, U. Perego, 2007. An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31 (2), 213-238.

**[Destuynder et Djaoua, 1981]**

P. Destuynder, M. Djaoua, 1981. Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 3, 70-87.

**[de Borst et Mühlhaus, 1992]**

R. de Borst, H.B. Mühlhaus, 1992. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35 (3), 521-539.

**[Dufour et al., 2008]**

F. Dufour, G. Pijaudier-Cabot, M. Choinska, A. Huerta, 2008. Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. *Computers and Concrete* 5 (4), 375-388.

**[Dugdale, 1960]**

D.S. Dugdale, 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (2), 100-104.

**[Engelen et al., 2003]**

R.A.B. Engelen, M.G.D. Geers, F.P.T. Baaijens, 2003. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *International Journal of Plasticity* 19 (4), 403-433.

**[Feld-Payet, 2010]**

S. Feld-Payet, 2010. Amorçage et propagation de fissures dans les milieux ductiles non locaux. Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

**[Forest et Sievert, 2006]**

S. Forest, R. Sievert, 2006. Nonlinear microstrain theories. *International Journal of Solids and Structures* 43 (24), 7224-7245.

**[Fraternali, 2007]**

F. Fraternali, 2007. Free discontinuity finite element models in two-dimensions for in-plane crack problems. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 47 (3), 274-282

**[Frémond et Nedjar, 1996]**

M. Frémond, B. Nedjar, 1996. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures* 33 (8), 1083-1103.

**[Geers et al., 1998]**

M.G.D. Geers, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, R.H.J. Peerlings, 1998. Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 160 (1-2), 133-153.

**[Germain *et al.*, 1983]**

P. Germain, Q.S. Nguyen, P. Suquet, 1983. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics* 50 (12), 1010-1020.

**[Godard, 2004]**

V. Godard, 2004. Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton avec prise en compte de l'effet unilatéral : application à la simulation des enceintes de confinement nucléaires. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie.

**[Griffith, 1921]**

A.A. Griffith, 1921. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A221, 163-198.

**[Halphen et Nguyen, 1975]**

B. Halphen, Q.S. Nguyen, 1975. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique* 14, 39-63.

**[Hillerborg *et al.*, 1976]**

A. Hillerborg, M. Modéer, P.E. Petersson, 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Research* 6 (6), 773-781.

**[Irwin, 1957]**

G.R. Irwin, 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics* 24, 361-365.

**[Jirásek, 1998]**

M. Jirásek, 1998. Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures* 35 (31-32), 4133-4145.

**[Jirásek, 2000]**

M. Jirásek, 2000. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 188 (1-3), 307-330.

**[Jirásek et Zimmermann, 2001a]**

M. Jirásek, T. Zimmermann, 2001. Embedded crack model. Part I: Basic formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (6), 1269-1990.

**[Jirásek et Zimmermann, 2001b]**

M. Jirásek, T. Zimmermann, 2001. Embedded crack model. Part II: Combination with smeared cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (6), 1291-1305.

**[Jirásek et al., 2004]**

M. Jirásek, S. Rolshoven, P. Grassl, 2004. Size effect on fracture energy induced by non-locality. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28 (7-8), 653-670.

**[Kachanov, 1958]**

L.M. Kachanov, 1958. On the time to failure under creep conditions. *Otd. Tekhn. Nauk.* 8, 26-31

**[Krayani et al., 2009]**

A. Krayani, G. Pijaudier-Cabot, F. Dufour, 2009. Boundary effects on weight function in nonlocal damage model. *Engineering Fracture Mechanics* 76 (14), 2217-2231.

**[Ladevèze, 1992]**

P. Ladevèze, 1992. A damage computational method for composite structures. *Computers and Structures*, 44 (1-2), 79-87.

**[Laverne, 2004]**

J. Laverne, 2004. Formulation énergétique de la rupture par des modèles de Forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques. Ph.D. thesis, Université Paris XIII.

**[Lemaitre et Chaboche, 1985]**

J. Lemaitre, J.L. Chaboche, 1985. Mécanique des matériaux solide. Dunod.

**[Lorentz et Andrieux, 1999]**

E. Lorentz, S. Andrieux, 1999. A variational formulation for nonlocal damage models. *International Journal of Plasticity* 15 (2), 119-138.

**[Lorentz et Andrieux, 2003]**

E. Lorentz, S. Andrieux, 2003. Analysis of non-local models through energetic formulations. *International Journal of Solids and Structures* 40 (12), 2905-2936.

**[Lorentz et Badel, 2004]**

E. Lorentz, P. Badel, 2004. A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60 (2), 499-526

**[Lorentz, 2008]**

E. Lorentz, 2008. A mixed interface finite element for cohesive zone models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2), 302-317

**[Lorentz et al., 2011]**

E. Lorentz, S. Cuvilliez, K. Kazymyrenko, 2011. Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model. *Comptes Rendus Mécanique* 339 (1), 20-26.

**[Lorentz et Godard, 2011]**

E. Lorentz, V. Godard, 2011. Gradient damage models: Toward full-scale computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (21-22), 1927-1944.

**[Mariani et Perego, 2003]**

S. Mariani, U. Perego, 2003. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (1), 103-126.

**[Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989]**

J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, 1989. Continuum damage theory—application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics* 33 (2), 345-365

**[Mazars et Pijaudier-Cabot, 1996]**

J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, 1996. From damage to fracture mechanics and conversely: A combined approach. *International Journal of Solids and Structures* 33 (20-22), 3327-3342

**[Mediavilla et al., 2006a]**

J. Mediavilla, R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers, 2006. An integrated continuous-discontinuous approach towards damage engineering in sheet metal forming processes. *Engineering Fracture Mechanics* 73 (7), 895-916.

**[Mediavilla et al., 2006b]**

J. Mediavilla, R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers, 2006. A robust and consistent remeshing-transfer operator for ductile fracture simulations. *Computers and Structures* 84 (8-9), 604-623.

**[Mialon, 1988]**

P. Mialon, 1988. Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode thêta, *EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches*, Série C, n°3,1-28.

**[Moës et al., 1999]**

N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko, 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46 (1), 131-150.

**[Moës et Belytschko, 2002]**

N. Moës, T. Belytschko, 2002. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics* 69 (7), 813-833.

**[Morel et al., 2010]**

S. Morel, C. Lespine, J.L. Coureau, J. Planas, N. Dourado, 2010. Bilinear softening parameters and equivalent LEFM R-curve in quasibrittle failure. *International Journal of Solids and Structures* 47 (6), 837-850.

**[Needleman, 1988]**

A. Needleman, 1988. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 67 (1), 69-85.

**[Oliver, 1996]**

J. Oliver, 1996. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (21), 3575–3600

**[Patzák et Jirásek 2003]**

B. Patzák, M. Jirásek, 2003. Process zone resolution by extended finite elements. *Engineering Fracture Mechanics* 70 (7-8), 957-977.

**[Peerlings, 1999]**

R.H.J. Peerlings, 1999. Enhanced damage modelling for fracture and fatigue. Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven.

**[Peerlings et al., 1996]**

R.H.J. Peerlings, R. De Borst, W.A.M. Brekelmans, J.H.P. De Vree, 1996. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39, 3391-3403.

**[Petersson, 1981]**

P.E. Petersson, 1981. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Report TVBM – 1006, Lund Institute of Technology.

**[Pham, 2010]**

K. Pham, 2010. Construction et analyse de modèles d'endommagement à gradient. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie.

**[Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987]**

G. Pijaudier-Cabot, Z.P. Bažant, 1987. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics* 113 (10), 1512–1533.

**[Pijaudier-Cabot 1995]**

G. Pijaudier-Cabot, 1995. Non-local Damage, in *Continuum Models for Materials with Microstructure*, edited by H.B. Mühlhaus, John Wiley & Sons.

**[Pijaudier-Cabot *et al.*, 2010]**

G. Pijaudier-Cabot, D. Grégoire, L. Rojas Solano. Evolving boundary effects in non local damage models: continuum to discrete transition. IV European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2010, Paris, France)

**[Planas *et al.*, 1993]**

J. Planas, M. Elices, G.V. Guinea, 1993. Cohesive cracks versus nonlocal models: Closing the gap. *International Journal of Fracture* 63 (2), 173-187.

**[Rice, 1968]**

J.R. Rice, 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics* 35, 379-386.

**[Rice, 1980]**

J.R. Rice, 1980. The Mechanics of Earthquake Rupture, in *Physics of the Earth's Interior* (Proc. International School of Physics 'Enrico Fermi', course 78, edited by. A.M. Dziewonski and E. Boschi), Italian Physical Society and North-Holland Publ. Co., 555-649.

**[Rodríguez-Ferran *et al.*, 2005]**

A. Rodríguez-Ferran, I. Morata, A. Huerta, 2005. A new damage model based on non-local displacements. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 29 (5), 473–493.

**[Simatos, 2010]**

A. Simatos, 2010. Méthode XFEM pour la modélisation de grandes propagations en déchirure ductile. Ph.D. thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

**[Simo *et al.*, 1993]**

J.C. Simo, J. Oliver, F. Armero, 1993. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics* 12 (5), 277-296

**[Simone *et al.*, 2003]**

A. Simone, G.N. Wells, L.J. Sluys, 2003. From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (41-42), 4581-4607.

**[Triantafyllidis et Aifantis, 1986]**

N. Triantafyllidis, E.C. Aifantis, 1986. A gradient approach to localization of deformation. I-Hyperelastic materials. *Journal of Elasticity* 16, 225–237.

**[Wells et Sluys, 2001]**

G.N. Wells, L.J. Sluys, 2001. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (12), 2667-2682.



**[Wells *et al.*, 2002]**

G.N. Wells, L.J. Sluys, R. De Borst, 2002. Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (5), 1235-1256.

**[Xu et Needleman, 1994]**

X.P. Xu, A. Needleman, 1994. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42 (9), 1397-1434.

**[Zhou et Molinari, 2004]**

F. Zhou, J.F. Molinari, 2004. Dynamic crack propagation with cohesive elements: a methodology to address mesh dependency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59 (1), 1-24.

---

Documentation officielle du *Code Aster*<sup>1</sup>**[D.A. R3.06.13]**

Elément d'interface mixte pour des modèles de zone cohésive (xxx\_interface). R3.06.13.

**[D.A. R5.04.01]**

Modélisation non locale à gradient de variables internes GRAD\_VARI. R5.04.01.

---

<sup>1</sup> accessible librement depuis [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)





# Passage d'un modèle d'endommagement continu régularisé à un modèle de fissuration cohésive dans le cadre de la rupture quasi-fragile

## RESUME :

Les travaux présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans l'étude et l'amélioration des modèles d'endommagement continus régularisés (non locaux), l'objectif étant d'étudier la transition entre un champ d'endommagement continu défini sur l'ensemble d'une structure et un modèle discontinu de fissuration macroscopique.

La première étape consiste en l'étude semi-analytique d'un problème unidimensionnel (barre en traction) visant à identifier une famille de lois d'interface permettant de basculer d'une solution non homogène obtenue avec un modèle continu à gradient d'endommagement vers un modèle discontinu de fissuration cohésive. Ce passage continu / discontinu est construit de telle sorte que l'équivalence énergétique entre les deux modèles soit assurée, et reste exacte quelque soit le niveau de dégradation atteint par le matériau au moment où cette transition est déclenchée.

Cette stratégie est ensuite étendue au cadre 2D (et 3D) éléments finis dans le cas de la propagation de fissures rectilignes (et planes) en mode I. Une approche explicite basée sur un critère de dépassement d'une valeur « critique » de l'endommagement est proposée afin de coupler les modèles continus et discontinus au sein d'un même calcul quasi-statique par éléments finis. Enfin, plusieurs résultats de simulations menées avec cette approche couplée sont présentés.

**Mots clés :** Endommagement non local, modèle de zone cohésive, équivalence énergétique, méthode des éléments finis.

## Transition from a nonlocal damage model to a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure

### ABSTRACT :

The present work deals with the study and the improvement of regularized (non local) damage models. It aims to study the transition from a continuous damage field distributed on a structure to a discontinuous macroscopic failure model.

First, an analytical one-dimensional study is carried out (on a bar submitted to tensile loading) in order to identify a set of interface laws that enable to switch from an inhomogeneous solution obtained with a continuous gradient damage model to a cohesive zone model. This continuous / discontinuous transition is constructed so that the energetic equivalence between both models remains ensured whatever the damage level reached when switching

This strategy is then extended to the bi-dimensional (and tri-dimensional) case of rectilinear (and plane) crack propagation under mode I loading conditions, in a finite element framework. An explicit approach based on a critical damage criterion that allows coupling both continuous and discontinuous approaches is then proposed. Finally, results of several simulations led with this coupled approach are presented.

**Keywords :** Nonlocal damage model, cohesive zone model, energetic equivalence, finite element method.